

علم الانسان المعاصر



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA NAGAR

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res-
ponsible for damages to the book
discovered while returning it.

geometrical Conics.



سلسلہ رسائل علمیہ و تحقیقیہ

ہندی مخروطا

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے

و

محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔ اے

۱۳۵۶ھ ۱۳۴۶ھ ۱۹۳۶ء

طبع و اشاعت دار الفکر لاہور

فہرست مضامین

ہندی مخروطات

باب	مضمون	صفحہ
ویسا جہ	الف، ب، ج	۱ تا ۳۷
پہلا باب	مخروطوں کے عام خواص	۱ تا ۳۷
دوسرا باب	مکانی	۳۸ تا ۸۷
تیسرا باب	ناقص	۸۸ تا ۱۲۹
چوتھا باب	زائد	۱۳۰ تا ۱۷۲
ضمیمہ (الف)	مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں	۱۷۳ تا ۱۷۶
ضمیمہ (ب)	نیوٹن کا مسئلہ	۱۷۷ تا ۱۷۹
ضمیمہ (ج)	مخروطی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق	۱۸۰ تا ۱۸۲

دیسابہ

ہندی مخروطات کا مختصر رسالہ سب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹر میڈیٹ کی جماعتوں کے لیے جدید نصاب کی بنا پر تالیف کیا گیا ہے۔

چونکہ اس تالیف کا مقصد زیادہ تر نصاب کے مد نظر انٹر میڈیٹ کی جماعتوں کے طلبہ کی ضروریات کو پورا کرنا ہے اس لیے ہندی مخروطات کے بہت سے اہم مسائل کو مجبوراً اس رسالہ میں جگہ نہیں دی جاسکی۔ اس لحاظ سے اس رسالہ کو ہندی مخروطات کا محض ابتدائی رسالہ تصور کرنا چاہیے۔ تاہم مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کی غرض سے چند ایسی دفات بھی شملہ کر لی گئی ہیں جو نصاب میں داخل نہیں ہیں۔ مکرر بین طلبہ کے لیے ان مزید دفات کا مطالعہ دلچسپی خالی نہ ہوگا۔

پہلے باب میں مخروطیوں کے عام خواص پر اور بعد کے ابواب میں جداگانہ کافی ناقص اور زائد کے خواص پر بحث کی گئی ہے۔ چونکہ پہلے باب کے عام مسائل کسی قدر مشکل ہیں اس لیے مبتدی کی سہولت کے مد نظر دوسرے باب کے مسائل اس طرح لکھے گئے ہیں کہ اگر مناسب تصور کیا جائے تو اس باب کو پہلے پڑھ کر پہلے باب کا مطالعہ بعد میں کیا جاسکتا ہے۔ مختلف مسائل کے تحت کافی تعداد میں مشقی سوالات دیے گئے ہیں

اگر کہیں کہیں طالب علم کی سہولت کی غرض سے مشکل سوالات کے اشارے
یا حل بھی درج کیے گئے ہیں۔ ان مشکل سوالات میں سے بعض بذاتِ خود
مسئلوں کی سی اہمیت رکھتے ہیں۔

مؤلفان

شیخ برکت علی و محمد خواجہ محی الدین

نوٹ

جامعہ عثمانیہ کے امتحان انٹر میڈیٹ کے نصاب میں صرف
مندرجہ ذیل دفعات شامل ہیں:-

۱ تا ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱ تا ۲۹، ۳۱، ۳۲، ۳۳ تا ۵۴، ۵۷

۵۸، ۶۰ تا ۶۳۔

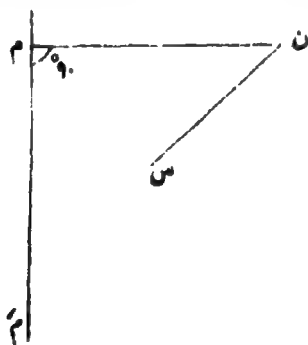
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندی مخروط

پہلا باب

مخروطیوں کے عام خواص

۱۔ تعریفات - س ایک ثابت نقطہ اور م م ایک ثابت خط مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح



حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ س ن، خط م م سے ن کے عمودی فاصلہ

ن م کے ساتھ ایک مستقل نسبت نہ رکھتا ہو تو ن کے طریق کو مخروطی تراش یا اختصاراً مخروطی کہتے ہیں۔

ثابت نقطہ س کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں، ثابت خط مستقیم م م کو مخروطی کا مرتب کہتے ہیں۔ مستقل نسبت نہ کو مخروطی کا خروج مرکز کہتے ہیں۔

اگر خروج مرکز نہ = ۱ تو مخروطی کو مکانی کہتے ہیں۔

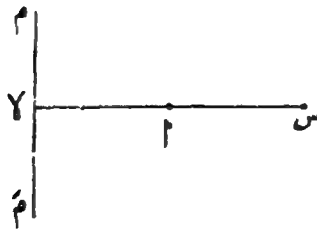
اگر خروج مرکز نہ > ۱ تو مخروطی کو ناقص کہتے ہیں۔

اگر خروج مرکز نہ < ۱ تو مخروطی کو زائد کہتے ہیں۔

نوٹ :- ان معنیوں کو مخروطی تراشیں اس لیے کہتے ہیں کہ سب قسم کی مخروطی تراشیں ایک مستدیر مخروط کو مختلف میدان والی مستوی سطحوں سے تراشنے سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اس امر کا ثبوت صرف قائم مستدیر مخروط کی صورت میں ضمیمہ میں دیا جائیگا۔

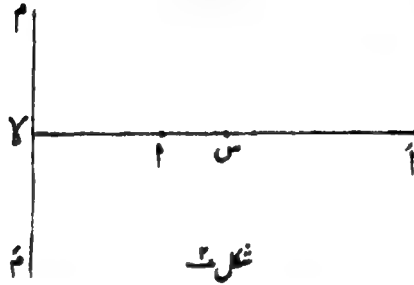
۲۔ اس باب میں ہمارا مقصد یہ ہے کہ چند ایسے اہم خواص کی تحقیق کریں جو سب مخروطیوں (مکانی، ناقص، زائد) میں مشترک ہیں۔ اولاً ہم مخروطیوں کی فصل کی تحقیق کریں گے۔

فرض کرو کہ مخروطی کا ماسکہ س ہے، مرتب م م ہے اور خروج مرکز نہ ماسکہ س سے مرتب م م پر عمود س لا نکالا گیا ہے۔ ہم س لا پر کے وہ نقطے معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔ صورت اول - مکانی - (دیکھو شکل ۱)۔



شکل ۱

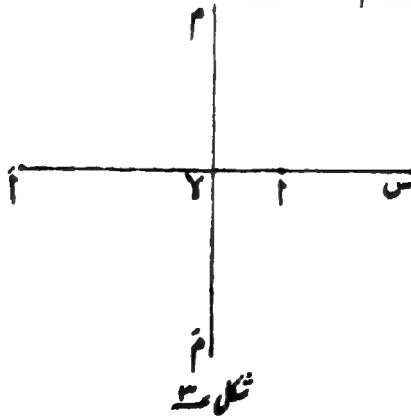
اس صورت میں اگر س لا کا وسطی نقطہ ا ہو تو مکانی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ نقطہ ا مکانی پر کا نقطہ ہوگا اور مکانی کا = ایک ہی نقطہ ہے جو س لا پر محدود فاصلہ پر ہے۔
صورت دوم - ناقص - (دیکھو شکل ۱۷)۔



س لا کی داخلی تقسیم نقطہ ا پر اور خارجی تقسیم نقطہ ا پر اس طرح کر دو کہ

$$\frac{س ا}{ا لا} = \frac{م ا}{ا م} \quad (جو چھوٹا ہے ا سے)$$

ظاہر ہے کہ ا مرتب م م کی اسی جانب واقع ہوگا جس جانب کہ اس کے سے ناقص کی تعریف سے ظاہر ہے کہ س لا پر کے دو نقطے ا اور ا ناقص پر کے نقطہ ہیں۔
صورت سوم - زائد (دیکھو شکل ۱۸)۔



س کو مرکز مان کر ز x ع لا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو ہ ہ سے
ن اور ن پر ملے، تب ن اور ن مخروطی پر کے مطلوبہ نقطے ہونگے۔
ن اور ن سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور ن م نکالو۔
س ن اور س ن کو بلاؤ۔

$$\frac{س ن}{ن م} = \frac{ز x ع لا}{ع لا} = ز \quad \text{یعنی ن مخروطی پر کا نقطہ ہے۔}$$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن بھی مخروطی پر کا نقطہ ہے۔

نوٹ۔ مکانی کی صورت میں ظاہر ہے کہ خط ہ ہ پر نقاط ن اور ن صرف
اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ نقاط ع اور س نقطہ ا کی ایک ہی جانب ہوں۔
دفعہ ۸ میں ثابت کیا جائیگا کہ ناقص کی صورت خط ہ ہ پر نقطے ن اور
صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ع نقاط ا اور ا کے درمیان ہو اور
ذاتہ کی صورت میں نقاط ن اور ن صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ
ع نقاط ا اور ا کے درمیان نہ ہو (دیکھو اشکال ۲۰۲ متعلقہ دفعہ ۲)۔

۴۔ چونکہ متساوی الساقین مثلث س ن ن کے قاعدہ ن ن پر
س ع عمود ہے اس لیے ن ن کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ
مخروطی کے اُس وتر ن ن کی جو مرتب کے متوازی ہے خط س لا عمودی
تتصیف کرتا ہے۔

تعریفات :- اگر ایک منحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ خط
منحنی کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود ہو تنصیف کرتا ہو تو منحنی بمجاہ خط مذکور کے
متشاکل کہلاتا ہے، خط مذکور کو منحنی کا ایک محور کہتے ہیں اور منحنی اور محور کے
نقطہ یا نقاط تقاطع کو منحنی کے راس کہتے ہیں۔

پس ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا :-
مخروطی تراش بمجاہ اُس خط کے جو اس کے میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر
عمود ہے متشاکل ہے۔

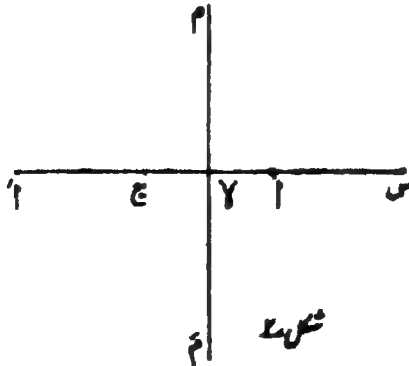
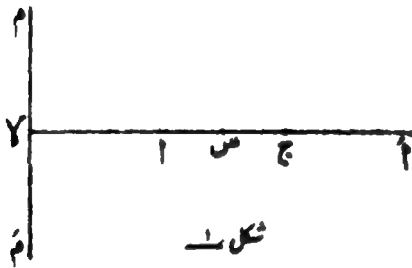
نیز مکانی کا ایک راس ا ہے اور ناقص اور دائرہ میں سے ہر ایک کے

دو راس ۱ اور ۲ ہیں۔

نوٹ :- مکانی کی صورت میں اگر س لا کی خارجی تقسیم ۲ پر ۱:۲ کی نسبت میں کی جائے تو نقطہ ۱ لاتنا ہی پر ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکانی کا ایک اور راس ۱ ہے جو لاتنا ہی پر ہے۔

۵۔ اگر وضع ۲ کی ترقیم کے مطابق ناقص یا زائد کے راس ۲، ۱ ہوں اور ۱ کا وسطی نقطہ ج ہو (اور علامتوں کو ملحوظ نہ رکھا جائے) تو

$$\begin{aligned} \frac{س ۱}{۷۱} &= \frac{۱}{۷۱} \\ \frac{س ۱ + ۱ س ۲}{۷۱ + ۷۱} &= \frac{۱ س ۱}{۷۱} \quad \text{اس لیے} \\ \frac{س ۱ - ۱ س ۲}{۷۱ - ۷۱} &= \end{aligned}$$



پس ناقص (شکل ۱) کی صورت میں

$$\frac{س ۲}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = \frac{۱ س}{۷ ۱}$$

اور زائد (شکل ۲) کی صورت میں

$$\frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = \frac{س ۲}{۱ ج ۲} = \frac{۱ س}{۷ ۱}$$

پس ناقص اور زائد دونوں میں

$$\frac{س ۲}{۷ ۱} = \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = \frac{ج س}{۱ ج ۱}$$

جس سے ذیل کے نتائج حاصل ہوئے ہیں :

$$(۱) \dots\dots\dots ۷ ج \times ج س = ۱ ج$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ ج \times ز = ج س$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱ ج}{ز} = ۷ ج$$

$$\text{اور } \frac{ج س}{۱ ج ۱} \times \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = ز$$

$$(۴) \dots\dots\dots ۱ ج \times ز = ج س \text{ یعنی}$$

امثلیہ

دفعہ (۱) کی ترقیم کے مطابق

$$(۱) \text{ مکانی مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۲$$

$$(۲) \text{ ناقص مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۶ \text{ سمر اور } ز = \frac{۱}{۲}$$

$$(۳) \text{ زائد مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۵ \text{ سمر اور } ز = ۲$$

$$(۴) \text{ زائد مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۵ \text{ سمر اور } ز = \frac{۲}{۳}$$

$$(۵) \text{ اگر مخروطی پردہ نقطہ ن اور ن ایسے ہوں کہ } س ن = س ن تو$$

ثابت کرو کہ $س$ $ن$ اور $س$ $ن$ مخروطی کے محور $س$ $لا$ کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۶) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کے ماسکے کا طریق معلوم کرو۔

(۷) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے تین نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کا ماسکے معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۸) مخروطی کا ماسکے $س$ ہے اور $س$ سے مرتب پر محور $س$ $لا$ ہے۔ اگر مخروطی پر کا کوئی نقطہ $ن$ ہو تو ثابت کرو کہ $س$ $ن$ کے وسطی نقطہ کا طریق بھی ایک مخروطی ہے۔ ماسکے $س$ پر ہے اور مرتب $س$ $لا$ کے وسطی نقطہ $س$ سے گزرتا ہے اور اس کا خروج المرکز دیے ہوئے مخروطی کے خروج المرکز کے مساوی ہے۔

(۹) مخروطی کا ماسکے $س$ ہے اور مخروطی پر کا کوئی نقطہ $ن$ ہے۔ $س$ $ن$ پر ایک نقطہ $ق$ اس طرح لیا گیا ہے کہ $س$ $ق$: $س$ $ن$ ایک مستقل مقدار ہے۔ $ق$ کا طریق معلوم کرو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ دو مخروطی جن کا ایک ماسکے اور جواب کا مرتب وہی ہو ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔

(۱۱) مخروطی کا ماسکے 'خروج المرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں مخروطی کا مرتب معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۲) مخروطی کا مرتب 'خروج المرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں مخروطی کا ماسکے معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۳) $ن$ $ن$ مخروطی کا ایک وتر ہے جو ماسکے $س$ میں سے گزرتا ہے اور $ن$ $ن$ کے وسطی نقطہ $س$ سے مرتب پر محور $س$ $لا$ کیا ہے ثابت کرو کہ

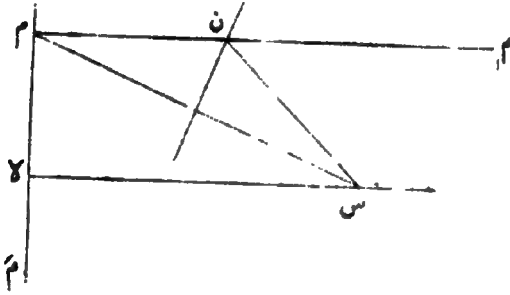
$$\frac{س}{س} = \frac{ن}{ن} \quad \text{جہاں } ز \text{ خروج المرکز ہے}$$

(۱۴) اگر ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے اور ایک ثابت خط کو ایک مستقل زاویہ $ح$ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے

جس کا خروج مرکز قطع ہے۔

۶۔ مخروطی کا ماسک س مرتب م م اور خروج مرکز ز معلوم ہیں کوئی خط م م مرتب پر عمود وار ہے۔ ہم م م پر وہ نقطہ یا نقطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ مخروطی مکانی ہے (یعنی $z = 1$) نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م مخروطی کے مرتب م م سے م پر ملتا ہے۔ ماسک س کو م سے ملاؤ۔ فرض کرو کہ س م کا عمودی ناصف م م سے نقطہ ن پر ملتا ہے تب مکانی پر کا مطلوبہ نقطہ ن ہو گا کیونکہ $\frac{ن م}{م م} = 1$ ۔



صورت دوم۔ فرض کرو کہ مخروطی ناقص یا زائد ہے اور مخروطی کے رأس ۱ اور ۲ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م مخروطی کے مرتب سے م پر ملتا ہے۔ مخروطی کے ماسک س کو م سے ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ خط ج ۱ ۲ میں گزرتے ہیں اور مرتب کے متوازی ہیں خط س م (مدد دہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب نقاط ع ع پر ملتے ہیں۔

متوازی خطوط کے قاطعوں کے خواص سے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{ز}{م} = \frac{س ۱}{س ۲} = \frac{ع ۱}{ع ۲}$$

$$\frac{ز}{م} = \frac{س ۱}{س ۲} = \frac{ع ۱}{ع ۲} \quad \text{اور}$$

اس لیے س م کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت زمین بالترتیب ۱۶ اور ۸ پر ہوتی ہے۔

پر ہوتی ہے۔
 ع کے قطر پر ایک دائرہ (و) کھینچو۔ فرض کرو کہ دائرہ (و) ویسے ہوئے خط م م سے نقاط ن، ن، ن پر ملتا ہے۔ تب ن اور ن مطلوبہ نقاط ہونگے

$$z = \frac{س۲}{۷۱} = \frac{س۶}{م۶} = \frac{سن}{نم}$$

اور اسی طرح $z = \frac{n_1}{n_2}$

پس ثابت ہوا کہ n اور n مطلوبہ نقطے ہیں۔
 ۷۔ اگر ω قطر پر کے دائرہ کے مرکز O میں سے ایک خط کھینچا جائے جو مرتب کے متوازی ہو تو یہ خط AA' کے وسطی نقطہ J میں سے گزرے گا اور نیز وتر n کی عمودی تقصیف کرے گا۔

پس معلوم ہوا کہ مخروطی کے محور کے متوازی کسی وتر ن کا وسطی نقطہ
ف (دفعہ کرو) اس خط پر واقع ہے جو ۱۱ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے
اور مرتب کے متوازی ہے۔

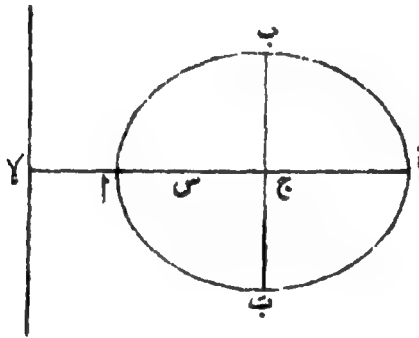
پس وضعہ کی تعریف کے بموجب ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا۔
محرفی (ناقص یا زائد) تشاکل ہے بلحاظ اس خط کے جو راسوں کو
ماننے والے خط کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔
پس ثابت ہوا کہ ناقص اور زائد کی صورت میں محرفی کے تشاکل کے دو محوریں
جن میں سے ایک مرتب پر عمود وار ہے اور دوسرا مرتب کے متوازی ہے۔

ان محوروں میں امتیاز کرنے کی غرض سے اس محور کو جو مرتب پر عمود قرار ہے محزوطی کا قاطع محور اور اس محور کو جو مرتب کے متوازی ہے مزدوج محور کہتے ہیں۔

۸۔ اگر دو گزشتہ شکل میں دائرو (و) خطوط اع اور اع سے گزرتے بالترتیب نقاط اور ہ پڑے تو خطوط عم و عم دونوں ا کے متوازی ہوں گے

کیونکہ زاویے عہء اور عہء دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے $\text{عہء} = \text{آء} = \text{ہء}$ ناقص کی صورت میں (دیکھو شکل ۷ دفعہ ۶) وتر ن بمقابلہ عہء کے دائرہ کے مرکز سے زیادہ دور ہے۔ کیونکہ نقاط عہء اور عہء نقطہ م کی ایک ہی جانب ہیں۔ اس لیے $\text{ن} > \text{عہء}$ یعنی $\text{ن} > \text{آء}$ پس معلوم ہوا کہ ناقص کلیئہ خطوط آء اور عہء کے درمیان واقع ہے۔

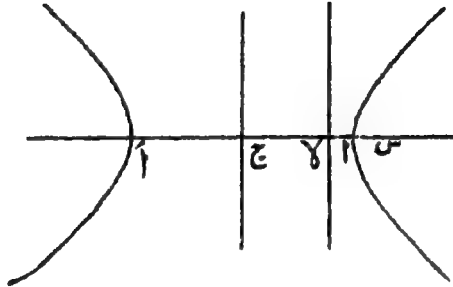
اگر ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور ن م مسعود ہو مرتبہ پر تو $\text{ن} > \text{آء}$ لا کیونکہ ن خطوط آء اور عہء کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے $\text{ن} > \text{س}$ یعنی ناقص پر کا ہر نقطہ ماسکے س سے محدود فاصلہ پر ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ناقص ایک بند بیضوی تختی ہے۔



اگر خط ب ج ب متوازی ہو مرتبہ کے اور نقاط ب اور ب ایسے ہوں کہ $\text{س ب} = \text{س ب} = \text{ن} \times \text{ج کا}$ تو ب اور ب ناقص پر کے نقطہ ہونگے اور یہ نقطہ مزدوج محور کے سرے ہونگے۔

نام کی صورت میں (دیکھو شکل ۷ دفعہ ۶) وتر ن بمقابلہ عہء کے دائرہ کے مرکز سے زیادہ قریب ہے کیونکہ نقاط عہء اور عہء نقطہ م کی مخالف جانبوں میں واقع ہیں اس لیے $\text{ن} < \text{عہء}$ یعنی $\text{ن} < \text{آء}$ پس معلوم ہوا کہ زائد کلیئہ خطوط آء اور عہء کے باہر واقع ہے۔ چونکہ نقطہ م دائرہ کے اندر ہے اس لیے خط م دائرہ کے بیسیہ مستقیم نظریں

قطع کرتا ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ لام کو کافی بڑا لینے سے ن ن کا طول بھی بے حد بڑھایا جاسکتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علامتہ معلومہ شائیں ہیں جیسا کہ شکل ذیل میں دکھایا گیا ہے۔



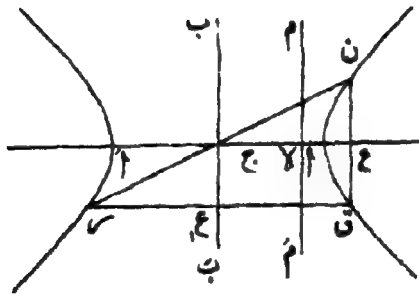
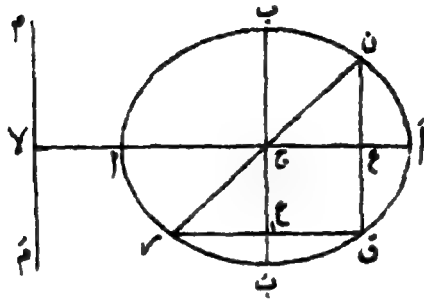
۹۔ مرکز دار مخروطی - فرض کرو کہ ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ

ن ہے۔ ن میں سے قاطع محور پر عمود دار ایک خط کھینچو جو قاطع محور ۱۲ (ممدودہ بشرط ضرورت) کو نقطہ ع پر اور منحنی کو مکرر نقطہ ق پر قطع کرے۔ تب دفعہ ۳ کی رو سے $ن ع = ع ق$ ، اب ق میں سے مزدوج محور پر عمود دار ایک خط کھینچو جو مزدوج محور ب ج ب کو نقطہ ع پر اور منحنی کو مکرر نقطہ س پر قطع کرے، تب دفعہ ۲ کی رو سے $ق ع = ع س$

چونکہ $ن ق = ۲ ن ع$ اور $ق س = ۲ ق ع$ اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ $ن ج س$ ایک خط مستقیم ہے اور $ن ج = ج س$

پس اگر ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور ن ج ممدودہ پر نقطہ س اس طرح لیا جائے کہ $ج س = ن ج$ تو نقطہ س بھی منحنی پر واقع ہوگا۔ پس نقطہ ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف

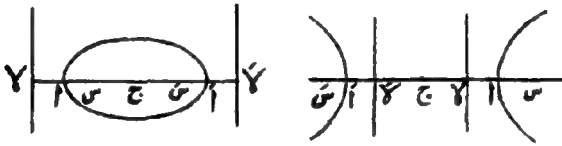
نقطہ ج پر ہوتی ہے۔ اس خاصیت کی بنا پر نقطہ ج کو مخروطی کا مرکز کہتے ہیں۔



اور کسی دتر کو جو مرکز میں سے گزرے مخروطی کا قطر کہتے ہیں۔
 ناقص اور زائد دونوں مرکز دار مخروطی تراشیں میں اور مکانی کا کوئی
 مرکز محدود فاصلہ پر وجود نہیں رکھتا۔
 ۱۰۔ مسئلہ۔ مرکز دار مخروطی کے دو ماسکے اور دو مرتبہ

ہوتے ہیں۔

ذہنہ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ناقص اور زائد دونوں اُس خط کے لحاظ سے متشاکل ہیں جو ج میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر قاطع محدود پر نقاط میں اور لا ایسے لیے جائیں کہ ج س = ج س اور ج لا = ج لا اور لا میں سے ایک خط م لا م قاطع محور پر عمود وار کھینچا جائے تو س اور خط م م منحنی کے ساتھ



وہی خصوصیات رکھینگے جو نقطہ س اور خط م م رکھتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ منحنی کا ایک اور ماسکہ م ہے اور اس کے جواب کا مرتب م م ہے۔ یعنی ناقص اور زائد میں سے ہر ایک کے دو ماسکے اور ان کے جواب کے دو مرتب ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ترقیم۔ اس کتاب میں سہولت اور اختصار کے مد نظر خاص خاص نقطوں اور خطوں کے لیے مخصوص حروف استعمال کیے گئے ہیں۔ سوائے ان چند صورتوں کے جہاں اس کے خلاف بالتصریح بیان کر دیا گیا ہے طالب علم کو چاہیے کہ وہ بھی اسی ترقیم کو ملحوظ رکھے تاکہ اس کی اور مخدولوں کے اہم خواص کو یاد رکھنے میں اسے سہولت ہو۔ محمولہ بالا ترقیم حسب ذیل ہے۔

ایک ماسکہ س اور اس کے جواب کا مرتب م م

دوسرا ماسکہ س اور اس کے جواب کا مرتب م م

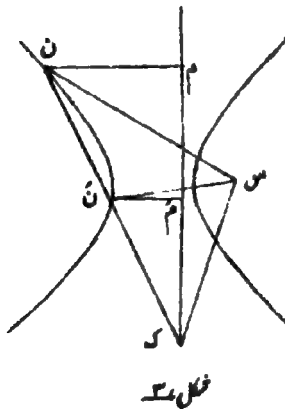
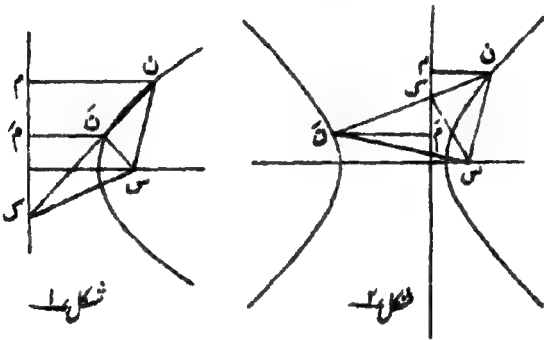
س س کے ساتھ مرتبوں م م اور م م کے تقاطع بالترتیب لا اور لا

مخدولی کا خروج المرکز ز

مخروطی پر کا کوئی نقطہ ن اور ن سے مرتب پر عمود ن م
مخروطی کے راس ۱، ۱' مخروطی کا مرکز ج

مرکز دار مخروطی کا مزدوج محور ب ب
مندرجہ بالا ترسیم کے علاوہ جہاں کہیں خاص نقطوں کو تعبیر کرنے کے لیے مخصوص
حروف استعمال کیے جائیں گے ان کی تشریح و تفاسیر درج ذیل کی جائیں گی۔

۱۱۔ مسئلہ۔ اگر مخروطی پر کے دو نقطوں ن، ن کو ملانے والا خط ایک مرتبے
ک پر ملے اور اس مرتب کے جواب کا ماسکہ س ہو تو س ک خطوط س ن، س ن کے
درمیانی زاویوں میں سے کسی ایک کا نصف ہوگا۔



ن اور ن سے مرتب بدعمود ن م اور ن م نکالو۔

$\frac{\text{سن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{سن}}{\text{ن م}}$ کیونکہ ہر ایک نسبت مخدولی کے خروج مرکز کے مساوی ہے۔

$\frac{\text{سن}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ن گ}}{\text{ن گ}}$ (کیونکہ شکلات ن م ک ن م ک متساوی ہیں)

اس لیے اشکال (۱) اور (۳) میں جہاں دونوں نقطے ن اور ن مخدولی کی ایک ہی شاخ پر ہیں خط سن ک، ن م کی خارجی تنصیف کرتا ہے اور خط سن م جہاں نقاط ن اور ن مخدولی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہیں خط سن ک، ن م کی داخلی تنصیف کرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن ک، ن م کا خارجی ناصف ہے جبکہ نقاط ن اور ن مخدولی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور داخلی ناصف ہے جبکہ ن، ن مخدولی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہوں۔

فرض۔ ایک خط مستقیم مخدولی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک خط مخدولی کو نقاط ن، ن، ن پر قطع کرے۔

فرض کرو کہ یہ خط ماسک م کے متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے تب مسئلہ بالائی رُو سے سن ک تینوں خطوط سن، ن، م اور سن، ن سے مساوی زاویے بناتا ہے اور یہ ناممکن ہے۔ (اگر مخدولی ناممکن ہو تو طالب علم خود مختلف صورتوں کے لیے مناسب شکلیں کھینچے)۔

امثلہ ۲

(۱) مخدولی کا ایک ماسک اور مخدولی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں۔

ثابت کرو کہ دیے ہوئے ماسک کے جواب کا مرتب دو ثابت نقطوں میں سے ایک د ایک میں سے گزرتا ہے۔

(۲) مخدولی کا ایک ماسک اور مخدولی پر کے تین نقطے معلوم ہیں مخدولی کا

مرتب معلوم کرو۔ بتاؤ کہ اس سوال کے چار مل ہیں جن میں کم از کم تین طوں کے جواب میں مخروطی رائے ہے۔

(۳) مخروطی کے ماسک میں سے گزرنے والے کوئی دو وترن N اور Q میں Q ہیں۔ ثابت کرو کہ N اور Q کا نقطہ تقاطع ماسک میں کے جواب کے مرتب پر ہے۔

(۴) مخروطی کا ایک ماسک مخروطی پر کے دو نقطے اور مخروطی کے قاطع محور کی سمت معلوم ہیں مخروطی کا مرتب دریافت کرو۔

(۵) مخروطی کے ماسک میں سے گزرنے والا کوئی وترن N ہے اور Q مخروطی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، اگر N اور Q ماسک میں کے جواب کے مرتب سے بالترتیب K اور K' پر طیں تو ثابت کرو کہ K میں K' قاطع ہے۔

(۶) N میں N مخروطی کا کوئی وتر ہے جو ماسک میں سے گزرتا ہے اور مخروطی کا ایک رأس A ہے، N اور N' ماسک میں کے جواب کے مرتب سے بالترتیب K اور K' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $K \times K' = \lambda$ میں λ جہاں λ قاطع محور اور مرتب کا نقطہ تقاطع ہے۔

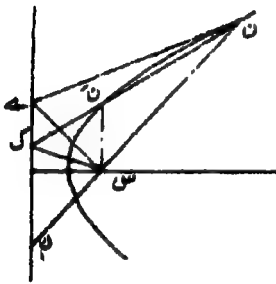
(۷) مخروطی کا ماسک معلوم کرو جبکہ مرتب، ایک رأس اور مخروطی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔

(۸) اگر مخروطی کا ایک ماسک، ایک رأس اور مخروطی پر کا ایک اور نقطہ معلوم ہوں تو دیے ہوئے ماسک کے جواب کا مرتب معلوم کرو۔

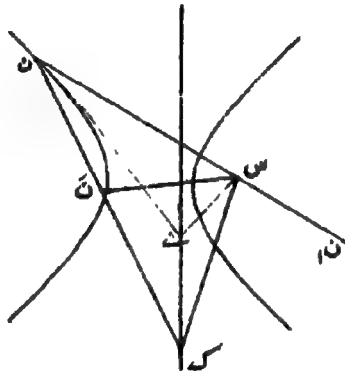
(۹) N مرکز دار مخروطی کا کوئی قطر ہے اور مخروطی کا ایک ماسک میں ہے۔ ثابت کرو کہ ناظر کی صورت میں N + N' مستقل ہے اور زائد کی صورت میں N اور N' کا وزن مستقل ہے۔

۱۲۔ تعریفات۔ اگر ایک منحنی پر N اور N' دو نقطے ہوں تو وترن N کے انتہائی مقام کو جبکہ N منحنی پر حرکت کر کے نقطہ N کے بنایت قریب آجاتا ہے (اور بالآخر N پر منطبق ہو جاتا ہے) نقطہ N پر منحنی کا مماس کہتے ہیں اور نقطہ N مماس کا نقطہ تماس کہلاتا ہے،

نیز وہ خط جن میں سے گزرتا ہے اور N پر کے ماس پر عمود ہے N پر منحنی کا
 عماد کہلاتا ہے۔
 ترقیم۔ منحنی کے کسی نقطہ N پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع عموداً
 گ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
 ۱۳۔ مسئلہ :- اگر مخروطی کے کسی نقطہ N پر کا ماس ایک
 مرتب سے S پر ملے اور اس مرتب کے جواب کا ماس S میں ہو تو
 N سے قائم ہوگا۔



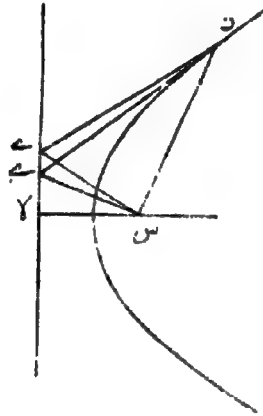
شکل ۱۔



شکل ۲۔

فرض کرو کہ مخروطی پر N کے قریب ایک اور نقطہ N ہے۔ اور خط مستقیم
 N N محدود مرتب سے S پر ملتا ہے۔
 N S کو N تک خارج کرو، تب دفعہ ۱۱ کی رو سے S S
 N S N کا خارجی ناصف ہوگا کیونکہ N N مخروطی کی ایک ہی
 شاخ پر ہیں۔
 جیسے جیسے N N کے قریب آتا جاتا ہے، S سے کے قریب

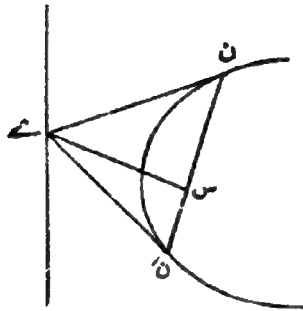
آتا جاتا ہے اور \angle ن س ن دو قاعوں کے قریب آتا جاتا ہے۔ اس لیے بالآخر جب ن ن پر منطبق ہو جائے تو \angle س ن س قائمہ \angle قائمہ \angle قائمہ \angle اس لیے \angle ن س س بھی قائمہ ہے۔
 عکس۔ اگر مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ماسکہ س سے س ن پر عمود س سے کھینچا جائے جو س کے جواب کے مرتب سے سے پر ملے تو ن سے مخروطی کے نقطہ ن پر کا ماسکہ ہو گا۔



اگر ن سے مخروطی کا ماسکہ نہیں ہے تو فرض کرو کہ ن پر کا ماسکہ مرتب سے سے پر ملتا ہے تب \angle ن س س قائمہ ہے نیز بموجب مفروض \angle ن س س جی قائمہ ہے اس لیے خط س سے منطبق ہے س سے پر یعنی نقاط سے اور سے ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے ن سے مخروطی کا ماسکہ ہے۔

نوٹ۔ اگر مخروطی کا ایک ماسکہ اور اس کے جواب کا مرتب معلوم ہو تو مسئلہ بالا کے عکس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کا ماسکہ کھینچ سکتا ہے۔
 ۱۴۔ تعریف۔ مخروطی کے ماسکہ میں سے گزرنے والا کوئی وتر ماسکی وتر کہلاتا ہے۔

مسئلہ - مخروطی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو متناظر مرتب پر قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س ن مخروطی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔ ماسک س سے ایک خط س سے کھینچو جو ن ن پر عمود ہو اور ماسک س کے متناظر مرتب سے پر لے، تب وضع ۱۳ کے مسئلہ کے عکس کی رو سے دونوں خط ن ن اور ن سے مخروطی کے ماس ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ ماسکی وتر ن س ن کے سروں ن ن پر کے ماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

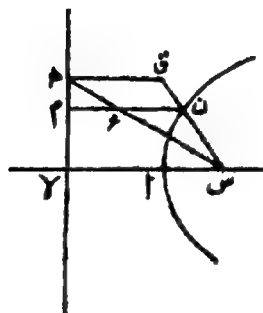
عکس - اگر مخروطی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس کو ملانے والا خط متناظر ماسک س سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ مرتب پر کے کسی نقطہ سے سے مخروطی کے ماس سے ن اور ن ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ن س ن خط مستقیم ہے۔

چونکہ ن سے مخروطی کا ماس ہے اس لیے زاویہ ن س سے قائم ہے، اسی طرح سے زاویہ ن س سے بھی قائم ہے۔ اس لیے متصلہ زاویوں ن س سے اور ن س سے کا مجموعہ دو قائمے ہے اس لیے ن س ن خط مستقیم ہے۔

۱۵۔ مسئلہ - اگر مخروطی کے نقطہ ن پر کے ماس پر کوئی

۱۶۔ مسئلہ۔ اگر کسی نقطہ ق سے مخروطی کے ایک مرتب پر عمود قائم نکالا جائے اور اس مرتب کے جواب کا ماسک سے ہوتا ہو تو نقطہ ق بڑا ہو گا یا چھوٹا ہو گا خروج مرکز نہ سے بموجب اس کے کہ نقطہ ق مخروطی کے باہر ہو یا اندر ہو۔



نقطہ ق محزومی کے باہر ہوگا اگر محمد و خط س ق محزومی کو ایک اور طرف ایک نقطہ پر (جس اور ق کے درمیان ہو) قطع کرے ورنہ اند ہوگا۔ فرض کرو کہ محزومی کے باہر ایک نقطہ ق ہے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ میں اور قیصر کی ایک ہی جانب ہیں فرض کرو کہ میں قیصر کی طرف سے ہوں۔

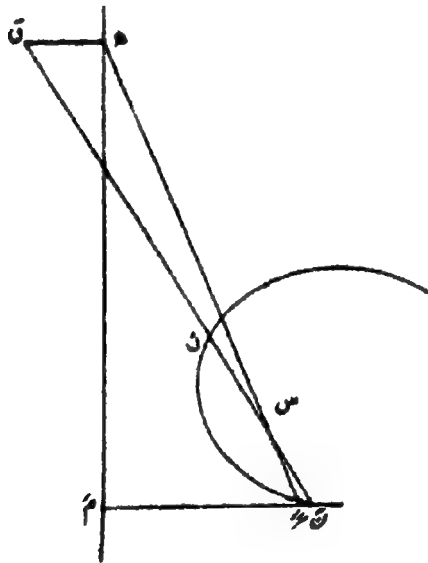
ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو، س ہ کو ملاؤ تب س ہ ن م کو
ن ا م کے درمیانی نقطہ ع پر قطع کر لیا۔
چونکہ ن ع متوازی ہے ق ہ کے

اس لیے $\frac{س ق}{ق م} = \frac{س ن}{ن ع}$

لیکن $\frac{m}{n} < \frac{m}{n}$ (کیونکہ n چھوٹا ہے m سے)

$$r = \frac{n_1}{n_2} < \frac{m_1}{m_2} \quad \therefore$$

پس ثابت ہوا کہ اگر ق بیرونی نقطہ ہو تو $\frac{س ق}{ق ہ} < ز$
 صورت دوم۔ فرض کرو کہ س ادرق مرتب کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔
 فرض کرو کہ محدود خط س ق محزومی کو نقطہ ن پر اور س ق
 محدود محزومی کو ن پر قطع کرتا ہے۔
 ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو اور فرض کرو کہ ہ س محدود ن م
 کو ن اور م کے درمیانی نقطہ غ پر قطع کرتا ہے۔



تب تفاہم ثلثات سے

$$\frac{س ق}{ق ہ} = \frac{س ن}{ن غ}$$

امچر کہ $\frac{س ن}{ن غ} < \frac{س ن}{ن م} = ز$

چونکہ d اور d' کے زاویے قائمے ہیں اس لیے t اور t' تماسات ہیں اس دائرہ کے جس کا مرکز s ہے اور نصف قطر s ہے جہاں $s = d = z \times t$ ۔

پس تحلیل بالاکہ بنا پر بیرونی نقطہ سے مخروطی کے دو تماس کھینچے حاصل فیمل عمل حاصل ہوتا ہے۔

ترکیب۔ دیے ہوئے نقطہ t سے مخروطی کے مرتب پر عمود t نکالو اور متناظر اس کے مرکز s کو مرکز مان کر $z \times t$ کی دوری پر دائرہ کھینچو۔ دفعہ ۱۶ کی رو سے ظاہر ہے کہ نقطہ t اس دائرہ کے باہر ہو گا۔ t سے اس دائرہ کے تماس t اور t' کھینچو۔

s اور مخروطی کا نقطہ تقاطع n اور s اور مخروطی کا نقطہ تقاطع n' معلوم کرو۔ تب t اور t' مخروطی کے مطلوبہ تماس ہونگے۔ فرض کرو کہ t مرتب سے s پر ملتا ہے، s سے کو ملاؤ۔ متقابہ مثلثات سے t اور n سے

$$\frac{t}{n} = \frac{t'}{n'} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{چونکہ } n \text{ مخروطی پر کا نقطہ ہے اس لیے } \frac{t}{n} = z \dots \dots \dots (۲)$$

نیز بموجب عمل دائرہ (s) کا نصف قطر $s = z \times t$ ۔

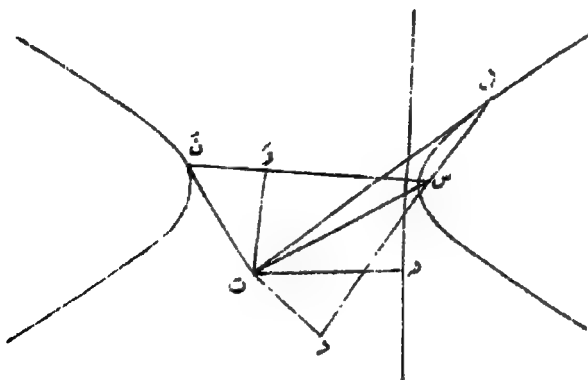
$$\text{اب (۲) اور (۳) سے } \frac{t}{n} = \frac{s}{z} \div \frac{s}{z} = \frac{t}{n} \dots \dots \dots (۴)$$

$$(۱) \text{ اور (۴) سے } \frac{t}{n} = \frac{s}{n} \dots \dots \dots$$

اس لیے $s = t$ دت

چونکہ $s > t$ دت قائمہ ہے اس لیے $s > t$ دس سے بھی

ت سے س ن اور س ن پر عمودت د اور ت د نکالو۔
 تب دفعہ ۵ ا کی ر د سے س د = ز ت ۵ اور س د = ز ت ۵
 یعنی س د = س د
 اب مثلثات ت س د اور ت س د میں
 $\angle ت س د = \angle ت د س$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
 ضلع س د = ضلع س د اور وتر س ت دونوں مثلثات میں مشترک ہے
 اس لیے مثلثات ت س د \equiv مثلثات ت س د
 اس لیے اگر نقاط تماس ن اور ن خزولہ کی ایک ہی شاخ پر ہوں (دیکھو شکل ۵۱۱)
 تو $\angle ت س ن = \angle ت س ن$
 اور اگر نقاط تماس ن اور ن خزولہ کی مختلف شاخوں پر ہوں
 (دیکھو شکل ۵۱۲) تو
 $\angle ت س د + \angle ت س ن = دو قوائمے$



شکل ۵۱۱

لیکن $\angle ت س د = \angle ت س ن$

اس لیے $\angle ت س ن + \angle ت س ن = دو قائمے$
یعنی زاویے $\angle ت س ن$ اور $\angle ت س ن$ ایک دوسرے کے مکمل ہیں۔
اُس صورت میں جبکہ دونوں نقاط تماس $ن$ اور $ن$ زائد کی اُس شاخ پر واقع ہوں جس کے اندر ماسک $س$ نہیں ہے، مناسب شکل کھینچ کر یہ آسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $\angle ت س ن = \angle ت س ن$
پس ثابت ہوا کہ بیرونی نقطہ $ت$ سے کھینچے ہوئے تماسات کے محاذی ماسک $س$ پر مساوی زاویے بنتے ہیں جبکہ دونوں نقاط تماس مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور مکمل زائد سے بنتے ہیں جبکہ نقاط تماس مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر واقع ہوں۔
فروع۔ اگر مخروطی کے دو نقطوں $ن$ اور $ن$ پر کے تماسات کا نقطہ تقاطع $ت$ ہو اور وتر $ن ن$ مخروطی کے ایک مرتب سے $ک$ پر ملے تو $ت ک$ کے محاذی متناظر ماسک $س$ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔
دفعات ۱۱ اور ۱۸ سے ظاہر ہے کہ $س ک$ $س$ $ت$ زاویہ $ن س ن$ کے منصف ہیں اس لیے $س ک$ اور $س ت$ کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے۔

مثلاً ۳

- (۱) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا ماسک معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ متناظر ماسک کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- (۲) مخروطی کا ایک ماسک، مخروطی پر کے دو نقطے اور ان نقطوں میں سے ایک نقطہ پر کا ماسک دیے گئے ہیں۔ متناظر مرتب معلوم کرو۔
- (۳) مخروطی کا ایک مرتب، مخروطی پر کے دو نقطے اور ان نقطوں میں سے ایک پر کا ماسک دیے گئے ہیں، متناظر ماسک معلوم کرو۔
- (۴) مخروطی کھینچو جبکہ مخروطی کا ایک ماسک، خروج المرکز اور مخروطی کے دیے ہوئے نقطہ پر کا ماسک معلوم ہیں۔

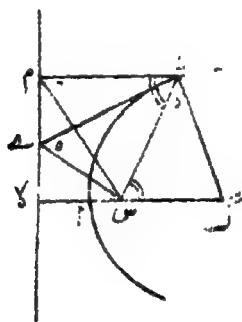
(۵) مخروطی کا کوئی ماسکس میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سر میں پرکے ماسکس سے ف ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ف کے محاذی محروطی کے ماسکس میں پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

(۶) مخروطی کا کوئی ماسکس محروطی کے دو ثابت ماسکس سے نقاط ف ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ف کے محاذی ماسکس پر مستقل زاویہ بنتا ہے۔

(۷) ایک ذواربقتہ الاضلاع کے ضلعی ناقص کو من کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ذواربقتہ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کے کسی جوڑے کے محاذی ماسکس پر مکمل زاویے بنتے ہیں۔

۱۹۔ اگر محروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد تابع محور سے گ پر ملے تو

ن گ = ن ز x ن م



فرض کرو کہ محروطی کے نقطہ ن پر کا عماد ماسکس میں سے گ پر ملے۔

مرتب سے نقطہ ن پر ملتا ہے ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔ م

م کو لاؤ۔

چونکہ $ن م = م گ = ن م$

اس لیے نقاط م ن م م م اس دائرہ پر ہیں جس کا قطر ن م ہے

نیز چونکہ \angle ن گ قائمہ ہے اس لیے ن گ اس دائرہ کا مماس ہے۔

$$\therefore \angle$$

اور چونکہ س گ متوازی ہے ن م کے

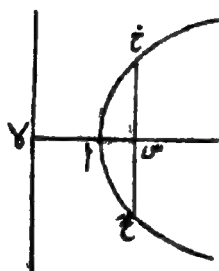
$$\therefore \angle$$

مثلاً ت گ ن س اور س س م ن متشابه ہیں

$$\therefore \frac{\text{س گ}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \text{ز}$$

$$\therefore \text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

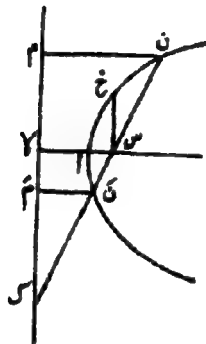
۲۰۔ تعریف :- اگر مخروطی کے ماسک س میں سے گزرنے والا ماسکی وتر خ س قاطع محور پر عمود وار ہو تو خ س کو مخروطی کا قطر خاص کہتے ہیں۔ اور نیم وتر خاص س خ کے طول کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔



مسئلہ - اگر مخروطی کے ماسکی وتر ن س کے سرے مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں تو

$$(1) \quad \frac{1}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{س ن}} + \frac{1}{\text{س ل}}$$

اور (۲) $س ن \times س ن = ل \times ن$



فرض کرو کہ اسکی وتر ن س ن مدورہ متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے
ن م اور ن م متناظر مرتب پر عمود نکالو۔

(۱) $\frac{س ن}{س ن} = \frac{ز \times ن م}{ز \times ن م}$ (بوجب تعریف مخروطی)

$\frac{ن م}{ک ن} = \frac{ک ن}{ک ن}$ (مقابلہ مثلثات سے)

اس لیے ن ن کی داخلی تقسیم س پر اور خارجی تقسیم ک پر ایک ہی نسبت میں
ہوتی ہے۔ یعنی ن ن کی موسیقی تقسیم س اور ک پر ہوتی ہے۔
اس لیے ک س کی موسیقی تقسیم ن اور ن پر ہوتی ہے۔
اس لیے ک ن، ک س، ک ن موسیقی سلسلہ میں ہیں۔
اس لیے تناسب سے ن م، س لا اور ن م موسیقی سلسلہ میں ہیں۔
∴ ز × ن م، ز × س لا، ز × ن م بھی موسیقی سلسلہ میں ہیں۔
∴ س ن، س خ، س ن موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

∴ $\frac{۱}{ل} = \frac{۱}{س خ} = \frac{۱}{س ن} + \frac{۱}{س ن}$

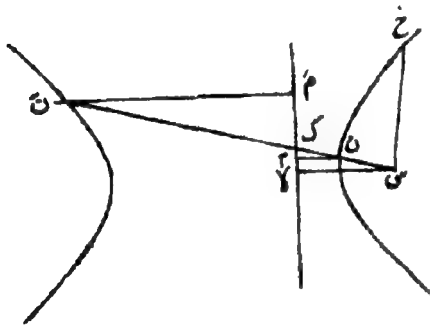
$$\frac{\text{ن} \text{ ن}}{\text{س} \text{ ن} \times \text{س} \text{ ن}} = \frac{\text{س} \text{ ن} + \text{س} \text{ ن}}{\text{س} \text{ ن} \times \text{س} \text{ ن}} = \frac{1}{\text{س} \text{ ن}} + \frac{1}{\text{س} \text{ ن}} \quad (۲)$$

لیکن (۱) کی رو سے $\frac{۲}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{س} \text{ ن}} + \frac{1}{\text{س} \text{ ن}}$

$$\frac{۲}{\text{ل}} = \frac{\text{ن} \text{ ن}}{\text{س} \text{ ن} \times \text{س} \text{ ن}} \quad \therefore$$

یعنی $\text{س} \text{ ن} \times \text{س} \text{ ن} = \text{ل} \times \frac{\text{ن} \text{ ن}}{۲}$

نوٹ - اگر زاؤ کی صورت میں ماسکی وتر کے سرے ن اور ن مختلف شاخوں پر ہوں (دیکھو شکل ذیل)



$$\frac{۲}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{س} \text{ ن}} - \frac{1}{\text{س} \text{ ن}} \quad (۱) \quad \text{تو}$$

اور (۲) $\text{س} \text{ ن} \times \text{س} \text{ ن} = \text{ل} \times \frac{\text{ن} \text{ ن}}{۲}$ حسب سابق ثابت کیا جاسکتا ہے کہ س ک کی موسیقی تقسیم ن 'ن' ہے ہوتی ہے۔

اس لیے دی ہوئی شکل کی مدد سے مطلوبہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

امثلیہ

(۱) دفعہ ۱۹ کی شکل میں اگر گ سے ن میں پر مودگ نکالا جائے تو ثابت کرو کہ گ = ز × م کا نیز ثابت کرو کہ ن عو نیم وتر خاص کے مساوی ہے۔

(۲) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر

س گ = ن گ تو ثابت کرو کہ م ن = ۲ م خ

(۳) مخروطی کا ایک ماسکی وترن میں ن متناظر مرتب سے ک پر

ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ک ن اور ک ن کا وسطی اوسط ک س ہے۔

(۴) ناقص یا زائد پر کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے نقطہ گ پر ملتا ہے اور

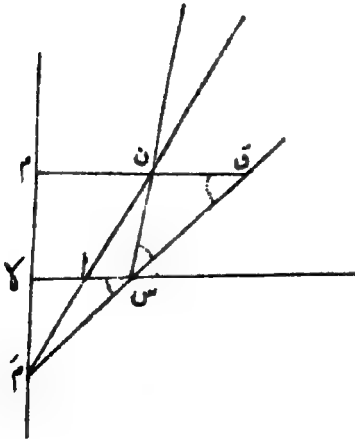
مخروطی کے ماسکے س اور م ہیں۔ ثابت کرو کہ ن گ زاویہ م ن س کا ایک ناصف ہے۔

[اشارہ۔ بموجب دفعہ ۱۹ س گ = ز × م ن اور س گ = ز × م ن

∴ س گ : س گ = م ن : م ن]

(۵) مخروطی کا ماسکے س مرتب م م اور راس ۱ معلوم ہیں مخروطی پر

کے نقطے معلوم کرنے کے لیے ذیل کے طریقہ کا ثبوت دو۔



ن اور ن پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع گ معلوم ہیں۔ خردیوں کے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۹) اگر خردیوں کے دو وتر ن ق اور ن ق مرتب سے ک اور ک پر ملیں اور متناظر ماسک میں ہو تو ثابت کرو کہ $\angle ک س ک' = \angle ن س ن'$ کے نصف کے مساوی ہے یا نصف کا مکمل۔

(۱۰) خردیوں پر کے دو نقطے خردیوں کا ماسک اور خروج المرکز معلوم ہیں خردیوں کے محور کا مقام معلوم کرو۔

(۱۱) اگر وتر خاص کے ایک سرے خ پر کا ماسک رأس ا پر کے ماسک سے ت پر ملے تو ثابت کرو کہ $\angle ا س = \angle ا س$

(۱۲) خردیوں کا ایک ثابت نقطہ ن ہے اور ایک نقطہ ت سے ماسکی نقطہ س ن پر عمود د اور متناظر مرتب پر عمود د نکالے گئے ہیں۔ اگر $\frac{س ن}{ن ت} = \frac{د س}{د ت}$ تو ثابت کرو کہ ت کا طریق نقطہ ن پر کا ماسک ہے۔

(۱۳) خردیوں کے کسی نقطہ ن پر کا ماسک مرتب سے سے پر ملتا ہے اور وتر خاص محدود سے ت پر ثابت کرو کہ $\frac{س ن}{ن ت} = \frac{س ت}{ت د}$ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر خردیوں کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماسک وتر خاص محدود سے ت اور ت پر ملیں تو $\angle س ت = \angle س ت$

(۱۴) خردیوں کے مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ ک سے ایک خط کھینچا گیا جو خردیوں کو ن اور ن پر قطع کرتا ہے اور ن اور ن پر کے ماسکات کا نقطہ تقاطع ت ہے ثابت کرو کہ ت کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو متناظر ماسک میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) خردیوں کے ماسک میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط پر کوئی نقطہ ہے ثابت کرو کہ ت سے کھینچے ہوئے ماسکات کا وتر خاص مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

(۱۶) خردیوں کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے اور گ سے س ن پر عمود گ ط ہے ثابت کرو کہ ن ط نیم وتر خاص کے

مساوی ہے۔

(۱۷) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عادی قاطع محور سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز گ اور نصف قطر گ ن ہے س ن میں سے ایک مستقل طول والا وتر قطع کرتا ہے۔

(۱۸) مخروطی کے ماسکے س سے مخروطی کے کسی ماس پر عمود س م نکالا گیا ہے اور متناظر مرتب پر عمود س لا ہے ثابت کرو کہ $\frac{س م}{لا م} = \frac{ن م}{لا م}$ اور اس کی مدد سے م کا طریق معلوم کرو۔
مکانی کی صورت میں یہ طریق کیا ہوگا۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ن پر کا ماس مرتب سے لے پر ملتا ہے۔
ن سے مرتب پر عمود م نکالو۔ تب $لا س = م لا = س لا = لا س$ ن م اور $لا س = م لا = س لا = لا س$ م ن اس لیے مثلثات س لا م اور س م ن مشابہ ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{س م}{لا م} = \frac{س ن}{م ن} = [ن]$$

(۱۹) مخروطی کے نقطہ ن پر کا عادی قاطع محور سے گزرتا ہے اور ن سے مرتب پر عمود ن م ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ = ن س م جہاں س متناظر ماسکے ہے۔ اس نتیجہ کی مدد سے مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر کا عادی کیمنچو۔

(۲۰) دو مخروطیوں کا ایک ماسکے س مشترک ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کا مشترک وتر س کے جواب کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

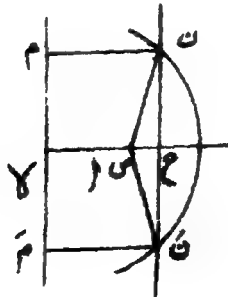
(۲۱) ایک مخروطی کا ماسکے مرتب اور خروج المركز معلوم ہیں مخروطی کا وہ ماس کیمنچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔

دوسرا باب

مکانی

۲۱۔ تعریفات — س ایک ثابت نقطہ اور م م ایک ثابت خط مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ ن س، خط مستقیم م م سے ن کے عمودی فاصلہ ن م کے مساوی ہوں تو ن کے طریق کو مکانی کہتے ہیں۔ ثابت نقطہ س کو مکانی کا ماسکہ کہتے ہیں۔ ثابت خط مستقیم م م کو مکانی کا مرتب کہتے ہیں۔

۲۲۔ مسئلہ۔ اگر مکانی کا اسکہ س اور مرتب م م معلوم ہوں تو مکانی کو رسم کرنا یعنی مکانی پر کے متعدد نقطے معلوم کرنا۔



اسکہ س سے مرتب م م پر عمود س لا نکالو، س لا کا وسطی نقطہ ۱

معلوم کر دو۔

چونکہ ۱ اس = ۷۱ اس لیے بموجب تعریف نقطہ ۱ مکانی پر کا نقطہ ہے
 لا اس پر کے کسی نقطہ $ع$ سے مرتب کے متوازی خط $ن ح$ کی کیجیو۔ اس کو مرکز
 مان کر $ع$ کا نصف قطر والا دائرہ کیجیو جو $ن ح$ کو $ن$ اور $ن$ پر قطع کرے۔ تب
 $ن$ اور $ن$ مکانی پر کے نقطے ہونگے۔

$ن$ اور $ن$ سے مرتب پر بالترتیب عمود $ن م$ اور $ن م$ نکالو۔
 چونکہ $ن م$ = $ع م$ = ۷۱ اس لیے $ن$ مکانی پر کا ایک نقطہ ہے۔
 اسی طرح $ن$ بھی مکانی پر کا ایک نقطہ ہے۔

ظاہر ہے کہ دائرہ $(ن م)$ خط $ن ح$ کو صرف اُسی صورت میں
 قطع کرے گا جبکہ دائرہ کا نصف قطر $ن$ بڑا ہو $م$ سے یعنی جبکہ $ع م$ ۷۱
 بڑا ہو $م$ سے اور یہ صرف اُسی صورت میں ممکن ہوگا جبکہ نقطہ $ع$ نقطہ ۱ سے
 اُسی طرف واقع ہو جس طرف $م$ اسکے سے واقع ہے۔

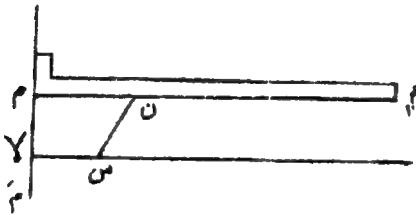
لا اس پر کے مختلف مقامات لے کر اسی عمل سے مکانی پر کے
 دیگر متعدد نقطے معلوم ہو سکتے ہیں اور مکانی پر قسم ہو سکتا ہے۔ عمل بالا
 سے صغنا یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہر خط جو مرتب کے متوازی ہے اور ۱ کے اُسی جانب
 واقع ہے جس جانب $م$ اسکے سے واقع ہے مکانی کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
 اس لیے مکانی لا محدود فاصلہ تک ایک طرف پھیلتا ہے اور کلیۃً ۱ اس
 کی اُسی جانب واقع ہے جس جانب $م$ اسکے سے ہے۔

۲۳۔ چونکہ مساوی الساقین مثلث $ن م ن$ کے قاعدہ $ن م$ پر $م$ سے
 عمود ہے۔ اس لیے $ن م$ کا وسطی نقطہ $ع$ ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکانی کے
 ہر ایسے وتر $ن م$ کی جو مرتب کے متوازی ہے خط لا اس (ممدودہ بشرط ضرورت)
 عمودی تنصیف کرتا ہے۔

تعریفات۔ اگر ایک منحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ منحنی
 کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود وار ہو تنصیف کرتا ہو تو منحنی بجا خط مذکور کے
 متشاکل کہلاتا ہے، خط مذکور منحنی کا محور کہلاتا ہے۔

پس ذیل کا مسئلہ مائل ہوا۔

مکانی بلحاظ خط س لا کے جو ماسکہ میں سے مرتب پر عموداً کھینچا گیا ہے متشاکل ہے یعنی خط لا س محدودہ مکانی کا محور ہے۔
تعریف - محور اور منحنی کے نقطہ تقاطع کو رأس کہتے ہیں۔
 پس شکل میں س لا کا وسطی نقطہ ۱ مکانی کا رأس ہے۔
 ۴۴ - مکانی کو جیلی طور پر ذیل کے طریقہ سے مرتسم کیا جاسکتا ہے:-
 فرض کرو کہ مکانی کا ماسکہ س اور مرتب م م دیے گئے ہیں۔

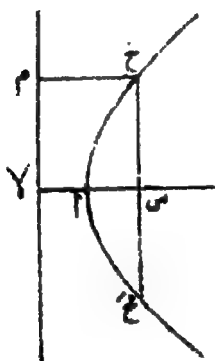


ایک سلاخ م م کے ایک سرے م کے ساتھ ایک بے پچک ڈوری کا لیکس بانڈھا گیا ہے جس کا طول م م کے مساوی ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا ماسکہ س کے ساتھ بانڈھا گیا ہے۔ اب سلاخ کو اس طرح پھسلا جاتا ہے کہ اس کا سر م مرتب پر رہتا ہے اور سلاخ ہمیشہ مرتب پر عمود وار رہتی ہے۔ ڈوری کو ایک پینل کی نوک کے ذریعہ جو ہمیشہ سلاخ کو مس کرتی ہے تنا ہوا رکھا جاتا ہے تب پینل کی نوک مکانی کو مرتسم کریں جس کا ماسکہ س اور مرتب م م ہے۔

$$\text{کیونکہ } س ن + ن م = م م = م ن + ن م$$

$$\therefore س ن = ن م$$

۲۵۔ تعریفات - اس کے میں سے گزرنے والے کسی وترن س ن کو ماسکی دتہ کہتے ہیں۔ اور ماسکس سے منحنی پر کے کسی نقطہ ن کے فاصلہ ن س کو ن کا ماسکی فاصلہ کہتے ہیں۔
 وہ ماسکی وتر جو محور پر عمود ہو وتر خاص کہلاتا ہے اور اس کے سروں کو بالعموم خ، خ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ س خ کو نیم وتر خاص کہتے ہیں اور اس کے طول کو بالعموم ل سے تعبیر کرتے ہیں۔
 اگر منحنی کے کسی نقطہ ن سے محور پر عمود ن ع ہو تو ن ع کو نقطہ ن کا معین کہتے ہیں اور معین کے پائین ع اور اُس ا کے درمیانی فاصلہ ا ع کو ن کا فصلہ کہتے ہیں۔
 مسئلہ - مکانی کا وتر خاص خ = م ا س
 وتر خاص کے سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

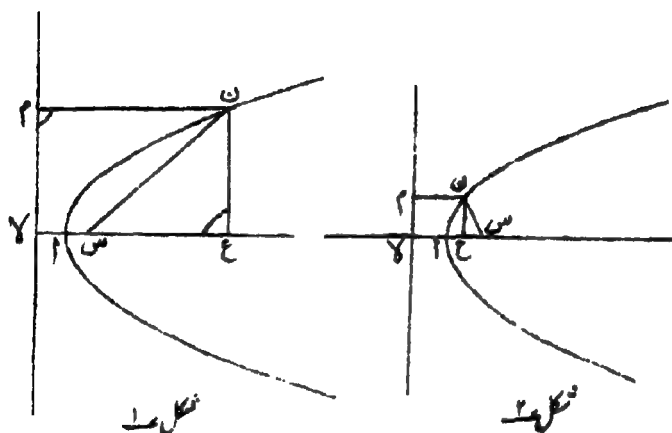


تب بموجب تعریف س خ = م خ
 لا س = م ا س
 چونکہ مکانی بلحاظ عمر لا س کے متقابل ہے
 اس لیے خ خ = م س خ
 خ خ = م ا س

۲۶۔ مسئلہ۔ اگر مکانی پر کے کسی نقطہ کا معین ن ع ہو تو

$$ن ع = ۲۱۲ \times ۱ ع$$

ن م کو طو اور ن سے مرتب پر نمود ن م نکار



$$چونکہ م ن = ن م$$

$$(۱) \dots \dots \dots ۲ ع = ن م = م ن$$

$$(۲) \dots \dots \dots ۲ ع + م ن = م ن$$

$$۲ ع - م ن = م ن$$

$$(۲ ع - م ن) (۲ ع + م ن) =$$

$$۲۱۲ = م ن - ۲ ع = م ن$$

$$۲۱۲ + م ن = م ن + ۲ ع$$

$$۲۱۲ + م ن =$$

$$۲۱۲ =$$

$$۲۱۲ - م ن = م ن - ۲ ع$$

$$۲۱۲ - م ن =$$

$$ع ۲ =$$

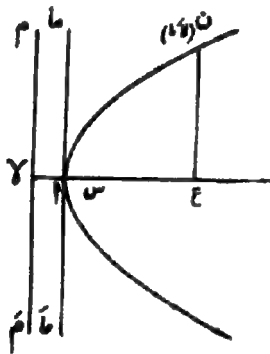
$$اور لا ع + س ع = لا س = ۲ اس$$

اس لیے دونوں صورتوں میں ن ع = ۲ اس × ع

نوٹ (۱) رشتہ ن = ۲ اس × ع سے ظاہر ہے کہ جوں جوں ع

بڑھتا ہے ع ن بھی بڑھتا ہے۔ پس معلوم ہوتا ہے کہ مکانی بند منحنی نہیں ہے۔

نوٹ (۲) مکانی کے رأس اس میں سے محور پر محدود اور ایک خط ما اما کیمنچہ۔



اب مکانی کے محور اس (محدودہ) اور خط ما اما کو بالترتیب والہ کے

لا محور اور ما محور مانو۔

فرض کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ ن کے محدود (لا، ما) ہیں

$$تب ع = لا اور ع ن = ما$$

بیزر رأس کے اسکی فاصلہ اس کو اسے تعبیر کرو تب اوپر کے

نتیجہ ع ن = ۲ اس × ع کو ذیل کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$ما = ۲ لا$$

چونکہ مکانی پر کے کسی نقطہ ن کے محدود (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے

ہیں اس لیے یہ رشتہ ما = ۲ لا مکانی کی مساوات ہے۔

عکس۔ اگر ایک نقطہ دو ملی القوائم متقاطع خطوط کی سطح میں سے خارج

حرکت کرے کہ ایک خط سے اُس کے عمودی فاصلہ کا مربع ایسے بدلے جیسے دوسرے خط سے اس نقطہ کا عمودی فاصلہ تو متحرک نقطہ ایک مکانی مرتبہ کرے گا جس کا محور پہلا خط اور جس کا رأس دیے ہوئے خطوط کا نقطہ تقاطع ہے۔

امثلہ ۵

نوٹ۔ امثلہ میں چار کہیں حروف کی تشریح نہیں کی گئی ان کا مفہوم ہمیشہ ہی لیا جائے جو سابقہ اشکال میں بتایا گیا ہے۔

(۱) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کر دو کہ نقطہ کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۲) مکانی کا ماسکہ م م ہے اور مرتب م م ہے۔ م م کوئی خط ہے جو مکانی کے مرتب پر عمود قرار ہے۔ م م کا عمودی نصف م م سے ن پر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ ن مکانی پر کا نقطہ ہے۔

(۳) مکانی کا ماسکہ اور مکانی پر کے دو نقطے معلوم ہیں۔ مکانی کا مرتب محور اور ماسک معلوم کرو۔

(۴) ثابت کر دو کہ محور کے متوازی کوئی خط مکانی کو ایک اور صوف ایک نقطہ پر کا ملتا ہے۔

(۵) مکانی پر دو نقطے اور ن اس طرح واقع ہیں کہ م ن = م ن' ثابت کر دو کہ م ن اور م ن مکانی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں اور مکانی کا محور ن ن کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۶) مکانی کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود م م ہے اور خط م م اس خط سے جو رأس ا میں سے محور پر عمود وار کھینچا جائے نقطہ ما پر ملتا ہے ثابت کر دو کہ م م کا وسطی نقطہ ما ہے اور ن ما عمود ہے م م پر اور م م کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) مکانی پر کوئی نقطہ ن ہے اور م م مرتب پر عمود ہے م م سے

سے مے کھینچا گیا ہے جو م ن پر عمود وار ہے اور مرتب سے سے پر ملتا ہے
ت کرو کہ ن سے زاویہ م ن م کا نصف ہے۔

(۸) ن م ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن م اور ن م مرتب
عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle م م م$ قائمہ ہے۔
(۹) ثابت کرو کہ کسی ماسکی وتر کے قطر پر جو دائرہ کھینچا جائے وہ مرتب
س کرتا ہے۔

(۱۰) ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ
م کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔
(۱۱) ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم کو اور ایک ثابت دائرہ کو ممس
اسے ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔
(۱۲) مکانی کا مرتب اور مکانی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں، ماسکہ کا طریق
معلوم کرو۔

(۱۳) مکانی پر کے دو نقطے اور مکانی کا مرتب معلوم ہیں۔ مکانی کا ماسکہ
معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۴) ثابت کرو کہ مکانی کے رأس ۱ اور وتر خاص کے سروں خ خ
م سے گزرنے والے دائرہ کا نصف قطر $\frac{۵}{۸} \times \text{خ خ}$ ہے۔

(۱۵) مکانی پر کے کسی نقطہ ن سے ۱ پر عمود ن ل کھینچا گیا ہے
یہ سے ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ع ل کا طول ہمیشہ وتر خاص کے مساوی ہوگا۔

(۱۶) ثابت کرو کہ رأس ۱ سے مثلث م ن ع کے حاکط دائرہ کے ماس
مثل $\frac{۱}{۴} ن ع$ ہے۔

(۱۷) رأس ۱ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر
۱ م ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ اور مکانی کا وتر مشترک ۱ م کی عمودی تقصیف
ہے۔

(۱۸) مکانی کا کوئی ماسکی وتر ن م ن مرتب سے ک پر ملتا ہے۔
ت کرو کہ ن م ن ک ایک موسیقی صفت ہے۔

(۱۹) ن س ن مکانی کا کوئی ماسک وتر ہے۔ اور ن ع ن ع محور پر عمود ہیں۔ سوال ۱۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ $ع ا \times ع ا = ا س$ (۲۰) مندرجہ بالا سوال ۱۹ میں ثابت کرو کہ ع ن اور ع ن کا ہندسی اوسط نیم وتر خاص ہے۔

(۲۱) مکانی کا محور ماسک اور مکانی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں مرتب معلوم کرو۔

(۲۲) مکانی پر کے کوئی دو نقطے ن اور ن ہیں اور ن ن کے قطر پر دائرہ کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ دائرہ یا تو مرتب کو مس کرے گا یا قطع ہی نہیں کرے گا اور اس کرنے کی صورت میں وتر ن ماسک میں سے گزرے گا۔

(۲۳) مکانی پر کا کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ ع ن کے وسطی نقطہ ق کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۲۴) مکانی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے۔ اگر $ا ع = ع ن$ تو ثابت کرو کہ ہر ایک کا طول وتر خاص کے مساوی ہے۔

(۲۵) مکانی پر کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے اور ن م کا وسطی نقطہ ق ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکانی ہے جس کا ر ا س ۲ کا وسطی نقطہ ہے۔

۲۶ مسئلہ اگر مکانی کے دو نقطوں ن ن کو ملانے والا خط مرتب سے ک پر ملے اور مکانی کا ماسک میں ہو تو اس ک خطوط س ن، س ن کے درمیانی زاویہ کا خارجی ناصف ہوگا۔

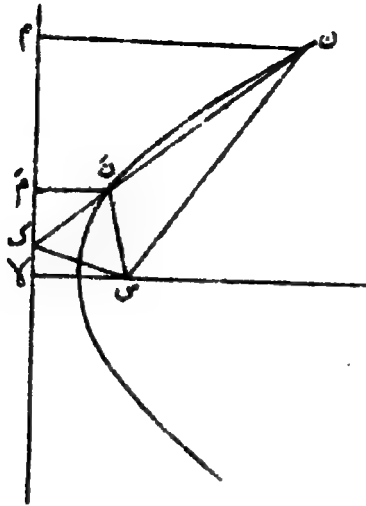
س ن، س ن اور س ک کو ملاؤ۔

ن م اور ن م مرتب پر عمود نکالو۔

تب متشابہ مثلثات ک ن م اور ک ن م سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ک ن}{ک ن} = \frac{ن م}{ن م}$$

= $\frac{س ن}{س ن}$ (بموجب مکانی کی تعریف کے)



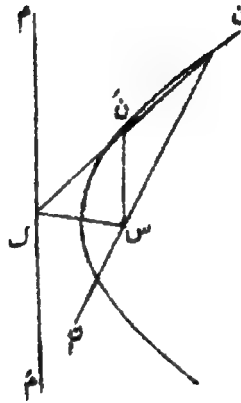
اس لیے س ک خارجی ناصف ہے $\angle س ن ک$ -
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸ - تعریفات - اگر ایک منحنی پر ن اور ن دو نقطے ہوں

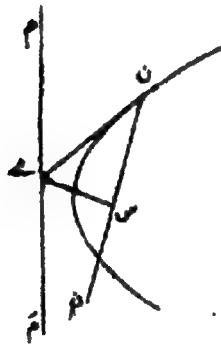
و ترن کے انتہائی مقام کو جبکہ ن منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے ہنبا
قرب آ جاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے، نقطہ ن پر منحنی کا مماس
کہتے ہیں اور نقطہ ن مماس کا نقطہ تماس کہلاتا ہے۔ نیز وہ خط
ن میں سے گزرتا ہے اور ن پر کے مماس پر عمود وار ہے ن پر منحنی
عماد کہلاتا ہے۔

مسئلہ - اگر مکانی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب -
ہے پر لے تو ن سے کے مماسی ماسک میں پر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ مکانی پر ن کے قریب ایک اور نقطہ ن ہے اور خط
ن ن عمودہ مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

ن م کو کسی نقطہ ن تک خارج کرو۔

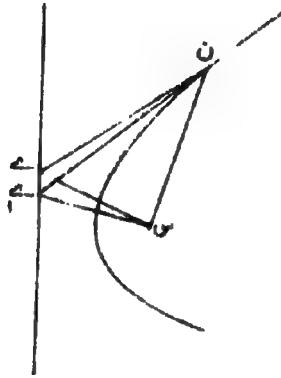


تب دھڑ ۲ کی رو سے
 $س ک > ن م$ کا خارجی نامف ہوگا۔



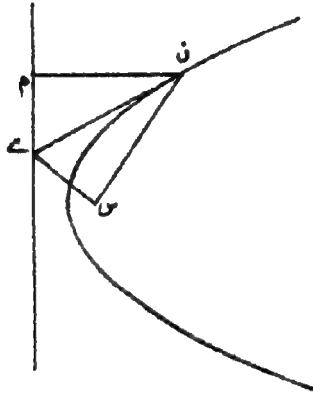
فرض کرو کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کر کے ن کے بے حد قریب آجاتا ہے اور
 بالآخر ن پر مضبوط ہو جاتا ہے تب وتر ن م کا انتہائی مقام نقطہ ن پہلکا کا اس

ہوگا اور نقطہ ک نقطہ سے پر منطبق ہو جائیگا۔ چونکہ N اور n ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے N سے n محدود ہو جاتا ہے۔ اس لیے زاویہ n سے N دو قاعوں کے مساوی ہو جاتا ہے اور چونکہ n سے N قائمہ ہے۔
 N سے n کا اس لیے N سے n قائمہ ہے۔
 عکس۔ اگر مکافی پر کوئی نقطہ n ہو اور ماسک سے n سے N پر عمود n سے کھینچا جائے جو مرتب سے n پر ملے تو n سے مکافی کے نقطہ n پر کا ماس ہوگا۔



اگر n سے مکافی کا ماس نہیں ہے تو فرض کرو کہ n پر کا ماس مرتب سے n پر ملتا ہے۔ تب N سے n قائمہ ہے۔ نیز بموجب مفروض N سے n بھی قائمہ ہے۔ اس لیے خطوط n سے اور n سے ایک دوسرے پر منطبق ہیں یعنی نقاط n اور n سے ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔ اس لیے n سے مکافی کے نقطہ n پر کا ماس ہے۔
 نوٹ ۱۔ اگر مکافی کا ماس n سے اور مرتب n سے معلوم ہوں تو مسئلہ کے عکس کی مدد سے مکافی کے کسی نقطہ n پر کا ماس نکال سکتا ہے۔
 ۲۹۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی نقطہ n پر کا ماس n سے

مرتب پر کے عمود N اور n کے ماسکی فاصلہ n سے کے درمیانی زاویہ
 n سے n کی تعریف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ مکانی کے نقطہ n پر کا ماس مرتب سے سے پر ملتا،
 سے سے کو ملاؤ۔

دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کی رو سے $n > n$ سے سے قائم ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں n سے اور n سے سے میں وتر n سے
 مشترک ہے اور

$$\text{ضلع } n = \text{ضلع } n$$

اس لیے مثلثات n سے اور n سے سے آپس میں
 ہر طرح سے مساوی ہیں۔

$$\text{اس لیے } n > n \text{ سے سے } n > n \text{ سے سے}$$

یعنی ماس n سے سے ناویہ n سے سے کا داخلی نصف ہے۔

عکس۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ n سے مرتب پر عمود n سے سے ہو

ناویہ n سے سے کا اندرونی نصف مکانی کے نقطہ n سے سے کا ماس ہوگا۔

فرض کرو کہ $n > n$ سے سے کا نصف n سے سے مرتب سے

مے پر ملتا ہے -

میں مے کو ملاؤ۔

تب مثلثات N میں M اور N میں N = N میں
 N مے مشترک ہے

اور N میں N = M میں N مے

اس لیے مثلثات N میں M اور N میں N آپس میں ہر طرح سے
 مساوی ہیں -

اس لیے N میں M = N میں M = قائمہ

اس لیے دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کے عکس کی جگہ N مے مکانی کا
 ماس ہے -

فروع (۱) مسئلہ بالا کی شکل میں M = M میں
 اور N میں N = M میں N

فروع (۲) مکانی کے رأس A پر کا ماس محور پر عمود ہوتا ہے -

معمولی ترتیب کے مطابق چونکہ A کا عمود ہے مرتب پر
 اس لیے مسئلہ بالا کی جگہ A پر کا ماس N میں A کا
 تنصیف کرتا ہے - لیکن N میں A = 2 قائمہ
 اس لیے A پر کا ماس N میں عمود ہے -

امثلہ

(۱) مکانی کے نقطہ N سے مرتب پر عمود N میں ہے ثابت کرو کہ

N پر کا ماس خط N میں عمودی تنصیف کرتا ہے -

(۲) مکانی کے نقطہ N سے مرتب پر عمود M ہے اور N میں

مرتب سے K پر ملتا ہے - ثابت کرو کہ M میں K قائمہ ہے -

(۳) N میں N مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے - N میں عمود مرتب

سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ N ک مکانی کے محور کے متوازی ہے۔
(۴) اگر دو مکانیوں کا مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان مکانیوں کے مشترک نقاط کو ملانے والا خط IN کے ماسکوں کو ملانے والے خط کی عمودی منصف کرتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ در خاص خ خ کے سروں پر کے ماسات کا نقطہ تقابل ہے۔

(۶) متعدد مکانیوں کے مرتب اور محور مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکانیوں میں سے ہر ایک دو ثابت علی التواضع خطوط کو مس کرتا ہے۔

(۷) ایک مکانی کا ماسکس ہے اور مرتب m پر کوئی نقطہ m کے درمیان واقع ہے، ثابت کرو کہ زاویوں m سے m اور m سے m کے اندر علی ناصف مکانی کو مس کرتے ہیں۔

(۸) دو مکافیلوں کا ایک ہی مرتب ہے اور ان کے ماسکے میں اور من
ہیں، ثابت کرو کہ ان مکافیلوں کے مشترک حماسات مرتب اور من میں کے
نقطہ تقاطع پر ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔

(۹) ن اور ن مکانی پر کے دو ثابت نقطے ہیں اور ق مخفی پر ایک
مختفی نقطہ ہے۔ ن ق اور ن ق مرتبے بالترتیب ک اور ک پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ ک س ک مستقل ہے۔

(۱۰) ثابت کرد کہ کوئی خط مستقیم مکافی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا۔

(۱۱) اگر نقطہ ن پر کے ماس پر کوئی نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ
تس = ت م، جہاں ن م مرتبہ پر عمود ہے۔

(۱۲) نقادان اور ن پر کے کماسات کا نقطہ تقاطع ت ہے اور
ن م اور ن م مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ $t = m = t = m$
(۱۳) ثابت کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ پر کا ماس و تر خاص
مردہ اور مرتب سے دو ایسے نقطوں پر ملتا ہے جو اس کے مساوی انصاف ہیں۔

(۱۳) مکانی پر کوئی نقطہ N ہے اور N ع عمود ہے محور پر۔ C ن
محدودہ وتر خاص کے سرے X پر کے ماس سے T پر قتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$SN = CT$

(۱۵) اگر ایک کتاب کے درق کو اس طرح T کیا جائے کہ ایک کونہ
مقابل کے ضلع پر رہے تو ثابت کرو کہ شکن ہمیشہ ایک مکانی کو مس کریگی۔

(۱۶) مکانی کا مرتب اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا ماس
معلوم ہیں۔ ماسک معلوم کرو۔

(۱۷) مکانی کا مرتب اور مکانی کے دو ماس معلوم ہیں۔ ماسک معلوم کرو۔

(۱۸) اگر تین مکانیوں کا ایک ہی مرتب ہو تو ثابت کرو کہ ان میں
سے دو دو کے تین مشترک وتران مکانیوں کے ماسوں سے بننے والے مثلث کے
حاطہ مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۱۹) ثابت کرو کہ روشنی کی ایک شعاع جو مکانی کے محور کے متوازی ہے
مکانی پر منعکس ہونے کے بعد مکانی کے ماسک میں سے گزرتی ہے۔

۳۔ ترقیم۔ نقطہ N پر کے ماس اور محور کے نقطہ تقاطع

کو بالعموم P سے اور N پر کے عماد اور محور کے نقطہ تقاطع کو بالعموم Q سے
تعبیر کیا جاتا ہے۔

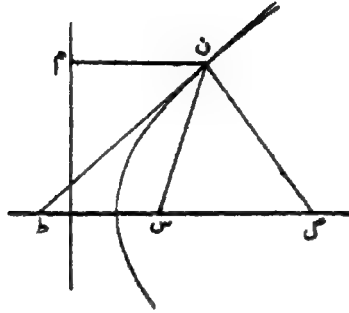
مسئلہ۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ N پر کے ماس اور عماد
محور سے بالترتیب P اور Q پر ملیں تو $SN = PN = SQ$
 N سے مرتب پر عمود N نکالو

تب دفعہ ۲۹ کی رو سے $SN = PN = SQ$

لیکن چونکہ N م // SN

اس لیے $SN = PN = SQ$

اس لیے $SN = PN = SQ$ (۱)



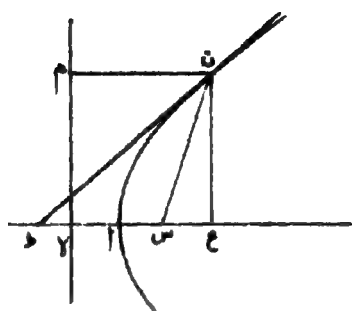
اس لیے $س ط = س ن$
 چونکہ مثلث $ط ن گ$ میں $\angle ط ن گ$ قائمہ ہے
 اس لیے $\angle ن ط گ + \angle ن گ ط = ایک قائمہ$
 اس لیے $\angle ن ط گ + \angle ن گ ط$
 $= \angle ط ن س + \angle س ن گ \dots (۲)$
 اس لیے (۱) اور (۲) کی مدد سے
 $\angle ن گ ط = \angle س ن گ$
 اس لیے $س ن = س گ$
 اس لیے $س ط = س ن = س گ$

۳۱۔ تعریف — اگر منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس

محور سے ط پر ملے اور ن ع عمود پر محور پر تو ط ع کون کا زیر کا ماس کہتے ہیں۔

مسئلہ — مکانی کے کسی نقطہ کے زیر کا ماس کی تصنیف رائے پر

ہوتی ہے -



فرض کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس محور سے ط پر ملتا ہے
اور ن ع عمود ہے محور پر۔ ثابت کرنا ہے کہ نقطہ ن کے زیر ماس
ط ع کی تنصیف رأس ا پر ہوتی ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

دفعہ ۳۰ کی رو سے ط س = س ن

لیکن س ن = ن م = م ع

۲ ط س = ط ع

۱ س = ۱ ع

اس لیے ط ا = ا ع یعنی ط ع کا وسطی نقطہ رأس ا ہے۔

۳۲۔ تعریف۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد

محور سے گ پر لے اور ن ع عمود ہو محور پر تو ع گ کوں کا ذریعہ
کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ مکانی کے کسی نقطہ کا زیر عماد مستقل ہوتا ہے اور

(۳) دھ ۳۰ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ ن س گ م Δ ن ط س

(۴) مکانی کا ایک ماس کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

(۵) دھ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ م ط ل = م س ع

(۶) دھ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ م ط ل = Δ ن س م

(۷) دھ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ م ط = م س ن

(۸) دھ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ م ط ن س متین ہے۔

(۹) سوال ۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر م مامو ہوں ط بد

تو مامو وسطی نقطہ ہوگا ن ط کا اور مامو ہمیشہ ا پر کے ماس پر واقع ہوگا۔

(۱۰) دھ ۳۱ کی شکل میں اگر Δ ن ط ع کے حاملہ دائرہ کا نصف

س ہو تو ثابت کرو کہ Δ ع ا = Δ م س ن۔

(۱۱) اگر دھ ۳۲ کی شکل میں Δ ن س گ مساوی الاضلاع

ہو تو مثلث کا ہر ضلع دیر خاص کے مساوی ہوگا۔

(۱۲) بتاؤ کہ مکانی کے دیے ہوئے نقطہ پر کا عمود ماس

کھینچنے کے بغیر کس طرح کھینچا جاسکتا ہے۔

(۱۳) دھ ۳۲ کی شکل میں ثابت کرو کہ Δ م س ل = Δ م س ن

(۱۴) ثابت کرو کہ ماسکے مکانی کے کسی عمود پر کے عمود کے پائین

کا طریق مکانی ہوتا ہے۔

(۱۵) اگر دو مکافیوں کا ماسکے مشترک ہو اور ان کے محور ایک ہی خط مستقیم

میں مخالفت سمتوں میں واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ مکانی ایک دوسرے کو

زاویہ قائمہ پر قطع کریں گے۔ [نوٹ: اگر دو منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے

ماس ایک دوسرے کو عمود وار قطع کریں تو کہا جاتا ہے کہ یہ منحنی ایک دوسرے کو

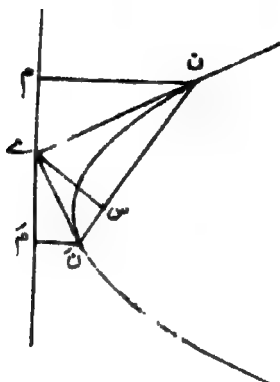
عمود وار یا علی القاعہ یا زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں]

(۱۶) متعدد مکافیوں میں ماسکے اور محور مشترک ہیں اور مشترک محور

کے ایک ثابت نقطہ سے ان کے ماسات کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

۳۳۔ مسئلہ۔ مکانی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے
ماس ایک دوسرے کو مرتب پر عمود وار قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔
س میں سے س سے، ن ن پر عمود وار کھینچو جو مرتب سے سے پر
ملے۔ ن سے اور ن سے کو ملاؤ، اور ن م اور ن م مرتب پر عمود نکالو۔
چونکہ بموجب عمل > ن س سے قائمہ ہے،
اس لیے ن سے مکانی کا ماس ہے (بموجب عکس دفعہ ۲۸)
اس طرح سے ن سے بھی مکانی کا ماس ہے۔
اور ان ماسوں کا نقطہ تقاطع سے مرتب پر ہے۔
اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ > ن سے ن قائمہ ہے۔
دفعہ ۲۹ کی فرع کی رو سے

$$\Delta n_{\text{م}} = \Delta n_{\text{م}}$$

یعنی مے ن اندرونی ناصف ہے > س ے م کا
اسی طرح ے مے ن اندرونی ناصف ہے > س ے م کا
ن ے ن قائم ہے۔

امثلہ ۹

(۱) اگر مکانی کے ایک ماسکی وتر n کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع سے جو اور n م اور n م مرتب پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ m م کا وسطی نقطہ سے ہوگا۔

(۲) مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکانی کے دو ماس ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔

(۳) مکانی کے دو علی التوائی ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۴) کسی ماسکی وتر n کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع سے ہے اور n م اور n م مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ m م اور n م بالترتیب n م اور n م کے متوازی ہیں۔

(۵) ایک مکانی کا مرتب اور ایک ماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکانی ایک اور ثابت خط کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے ماس پر عمود وار ہے۔

(۶) ایک مکانی کا مرتب اور ایک ماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکانی کے ماسکے کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۴۔ مسئلہ۔ مکانی کے کسی نقطہ n پر کے ماس پر کوئی

نقطہ t ہو اور t سے n کے ماسکی فاصلہ sn پر عمود t اور مرتب پر عمود t ہوں تو $s = d = t$

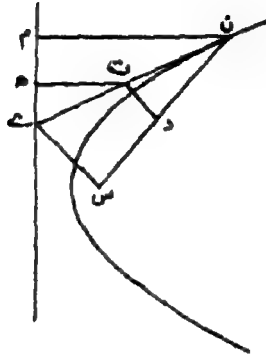
فرض کرو کہ n پر کا ماس مرتب سے s پر ملتا ہے۔

n سے مرتب پر عمود n نکالو۔

چونکہ $\angle sn$ قائم ہے اور $\angle tsn$ عمود $\angle n$ دت بھی قائم ہے۔

اس لیے sn دت

اس لیے $\frac{sn}{n} = \frac{st}{t} \dots \dots \dots (1)$



لیکن متشابہ مثلثات سے ت د اور م ن م میں

$$(۲) \quad \dots \dots \dots \frac{ت د}{ن م} = \frac{ت م}{ن م}$$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ت د}{ن م} = \frac{س د}{س ن}$$

اس لیے $\frac{س د}{ت د} = \frac{س ن}{ن م} = ۱$ (کیونکہ ن مکانی پر کا نقطہ ہے)

اس لیے س د = ت د

۳۵۔ مسئلہ۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر

ماسکے م سے ممد م ما نکالا جائے تو (۱) ما کا طریقہ راس م پر کا

یعنی ۱ ما محدود ۲ اس پر محدود ہے یعنی اما راس ۱ پر کا ماس ہے
(موجب فرع ۲ دفعہ ۲۹)

پس ثابت ہوا کہ ما کا طریق راس ۱ پر کا ماس ہے -
(۲) اب چونکہ ن م متوازی ہے س کے

اس لیے $\angle ۱ اس ما = \angle ۲ س م$ (کیونکہ س ن = ن م)
= $\angle ۳ ن س م$

اب مثلثات ۱ اس ما اور ما س ن میں

$\angle ۱ اس ما = \angle ۲ ما س ن$
اور $\angle ۳ ما اس = \angle ۴ ن ما س$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات ۱ اس ما اور ما س ن متشابه ہیں -

اس لیے $\frac{اس}{ما} = \frac{س م}{س ن}$

یعنی $اس \times س ن = ما^۲$
اس مسئلہ کے پہلے حصہ کا عکس نہایت اہم ہے اور حسیل

ہے - عکس: اگر مکافی کے راس پر کے ماس پر کوئی نقطہ ما جو
اور مان عمود کھینچا جائے ماس پر تو مان مکافی کا ماس ہوگا۔
فرض کرو کہ س ما محدود مرتب سے م پر ملتا ہے
م سے مرتب پر عمود م ن نکالو جو مان سے ن پر ملے
س ن کو ملاؤ -

مثلثات ن مام اور ن ماس میں

مام = ماس

مان مشترک ہے

اور $\angle ۱ ن مام = \angle ۲ ن ماس$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات ن مام اور ن ماس آپس میں ہر طرح سے

بلبر میں

اس لیے $N = M$

اور $M > N$ = $M > N$ ما

یعنی N مکانی پر کا نقطہ ہے اور N ما نقطہ N پر کا ماس ہے۔

فرع ۱۔ $M > N$ ما = $M > N$ ما

کیونکہ مثلثات M N ما اور M ما N ما متشابه ہیں۔

فرع ۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خط مستقیم پر

کے عمود کے پائین کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکانی M کرگیا جس کا ماس M دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

تعریف۔ اگر ایک خط ایک سطح مستوی میں اس طرح

رکت کرے کہ وہ ہمیشہ ایک خاص مغنی کو M کرے تو مغنی خط کا لغات کہلاتا ہے اور کہا جاتا ہے کہ خط مغنی کو لف کرتا ہے۔

پس مندرجہ بالا تعریف کی بناء پر فرع (۲) کو مسبقہ ذیل

لغات میں بھی بیان کر سکتے ہیں :-

اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خط مستقیم پر کے عمود کے پائین کا

ریق ایک خط مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکانی کو لف کرگیا جس کا

سکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا یا بالفاظ دیگر متغیر خط کا لغات

یہ مکانی ہوگا جس کا ماس M دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

۳۶۔ مسئلہ عملی۔ کسی بیرونی نقطہ سے مکانی کے دو ماس کیچیندا۔

طریقہ اول۔

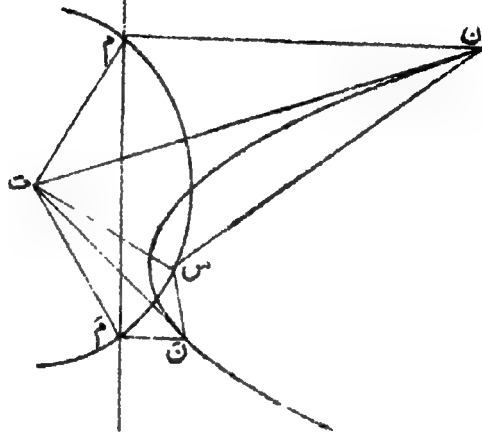
تحلیل۔ فرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ T ہے

اور بیرونی نقطہ T سے مکانی کے ماسات N اور M ہیں۔

N اور M سے مرتبہ بالترتیب عمود N اور M نکالو۔

اب مثلثات M N T اور M N T میں

ن س = ن م
ن ت مشترک ہے



$\angle س ن ت = \angle م ن ت$ (دفعہ ۲۹)

۱۔ مثلثات س ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

۲۔ $ت س = ت م$

اس طرح سے $ت س = ت م$
پس نقاط م اور م معلوم ہو سکتے ہیں۔
ترکیب :-

ت کو مرکز مان کر ت س کی دُوری پر ایک دائرہ کھینچو جو مرتب
کو م اور م پر قطع کرے۔ م اور م سے مرتب پر بالترتیب عمود م ن
اور م ن نکالو جو مکانی سے ن اور ن پر ملیں، ت اور ت کو طائر۔
تب ت ن اور ت ن مطلوبہ طاس ہونگے۔

مثلثات س ن ت اور م ن ت میں

ن س = ن م

ن ت مشترک ہے۔

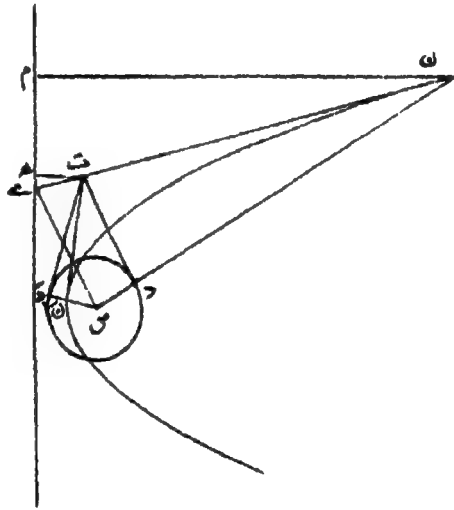
ت م = ت م (ازروئے عمل)
 مثلثات م ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے
 ہیں۔

$\angle م ن ت = \angle م ن ت$
 ، دفعہ ۲۹ کے عکس کی رو سے

ن ت مکانی کا ماس ہوگا۔

طرح سے ن ت بھی مکانی کا ماس ہوگا۔

طریقہ دوم۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے
 تحلیل۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے
 ، ماس ت ن اور ت ق ہیں۔



سے مرتب پر عمود ت م اور م ن اور م ن پر بالترتیب عمود
 د اور ت د نکالو۔

ب دفعہ ۳۱ کی رو سے

$$س د = ت م = م ن$$

کہ ت د معلوم ہے اس لیے م د معلوم ہو سکتا ہے۔

اور چونکہ دائرہ د پر کے زاویے قائم ہیں۔

اس لیے ت د اور ت د اُس دائرہ کے ماس میں جس کا مرکز م ہے

د نصف قطر م د ہے جو ت د کے مساوی ہے۔

پس تخلیل بالا کی بنا پر بیرونی نقطہ ت سے مکانی کے دو ماس

پہنچنے کا حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔

ترکیب - دیے ہوئے نقطہ ت سے مرتب پر عمود ت د نکالو۔

م کو مرکز مان کر ت د نصف قطر کا دائرہ کھینچو اور ت سے اس دائرہ

کے ماسات ت د اور ت د کھینچو۔

م د اور مکانی کا نقطہ تقاطع ن اور م د مکانی کا نقطہ تقاطع

ن معلوم کرو۔ تب ت ن اور ت ن مکانی کے دو مطلوبہ ماس

ہو گئے۔

فرض کرو کہ ت ن مرتب سے مے پر ملتا ہے۔

م مے کو ملاؤ، اور ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

تساؤ مثلثات مے ت د اور مے ن م میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ت د}{ن م} = \frac{مے ت}{مے ن}$$

(۲) چونکہ ن مکانی پر کا نقطہ ہے اس لیے ن م = م ن (۲)

اور بموجب عمل دائرہ (م) کا نصف قطر م د = ت د (۳)

(۲) اور (۳) کی مدد سے رشتہ (۱) جو جاتا ہے

$$\frac{مے ت}{مے ن} = \frac{م د}{م ن}$$

اس لیے م د // ت د

اس لیے ت د ن م مے قائم ہے۔

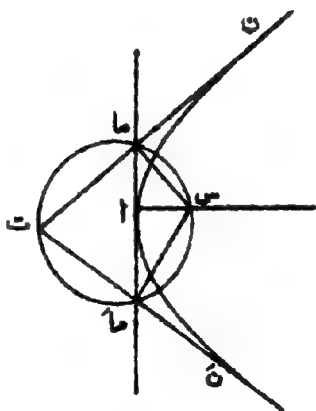
ما پے ن سے مکانی کے نقطہ ن پر کا ماس ہے اور یہ ماس
ما دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت میں سے گزرتا ہے۔

۱۰ طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ت ن بھی مکانی کا ماس ہے۔
۱۱ مکانی کے مطلوبہ ماس ت ن اور ت ن ہیں۔

۱۲۔ شکل بالا میں دائرہ (س) کے ماسات ت د اور ت د
سکے س پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

فی $\angle ت س ن = \angle ت س ن$
بھی معلوم ہوا کہ کسی بیرونی نقطہ سے مکانی کے دو ماسوں کے
پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

ریقہ سوم۔
تحلیل۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے
ماسات ت ن اور ت ن ہیں۔



۱۳ سے ماسات ت ن اور ت ن پر بالترتیب ممو س ما
نکالو۔

تب دفعہ ۳۵ کی رُو سے نقاط ما اور ما راس ۱ پر کے عکس راقع ہونگے۔

بزرچوگہ زاویے میں مات اور س مات قائم ہیں، اس لیے ت میں کے قطر پر کا دائرہ نقاط ما اور ما سے گزرے گا۔ پس تحلیل بالا کی بنا پر ماسات کھینچنے کا حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔ ت میں قطر پر دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ دائرہ راس ۱ پر کے ماس سے ما اور ما پر ملتا ہے۔

تب ت ما اور ت ما محدودہ مکانی کے مطلوبہ ماس ہونگے۔ چونکہ ماسک میں سے خطوط ت ما اور ت ما پر کے عمودوں کے پائیں راس ۱ پر کے ماس پر ہیں، اس لیے دفعہ ۳۵ کے عکس کی رُو سے خطوط ت ما اور ت ما محدودہ مکانی کے ماس ہیں جن کے نقاط ماس بالترتیب ن اور ن دفعہ ۳۵ کے مسئلہ کے عکس کے طریقہ سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

امثلہ

(۱) اگر مکانی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکانی کے ماسات کھینچے جائیں تو دفعہ ۳۶ کے طریقہ اعلیٰ کی مدد سے ثابت کرو کہ ماسات کا درمیانی زاویہ قائم ہے۔

(۲) اگر ایک زاویہ قائم کی ایک ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے اور راس ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکانی کو مس کرے گی جس کا ماسک دیا ہوا ثابت نقطہ ہے اور جس کے راس پر کا ماس دیا ہوا ثابت خط مستقیم ہے۔

(۳) مکانی کا ماسک اور دو ماس معلوم ہیں، مرتب معلوم کرو۔

(۴) مکانی کا ماسک اور ایک ماس معلوم ہیں۔ راس کا طریق معلوم کرو۔

(۵) مکانی کے کسی نقطہ پر کا ماس راس ۱ پر کے ماس سے

ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ما میں سے عدد کے متوازی خط ماسکی فاصلہ
س ن کی تنصیف کرتا ہے۔

(۶) مکافی کا کوئی ماس مرتب کے متوازی ایک ثابت خط سے
ملتا ہے اور نقطہ تقاطع سے ماس پر عمود وار ایک خط کھینچا گیا ہے۔
ثابت کرو کہ یہ خط ایک مکافی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ وہی ہے جو
دیے ہوئے مکافی کا ہے۔

(۷) مکافی پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ن س کے قطریہ
کا دائرہ راس پر کے ماس کو مس کرتا ہے۔

(۸) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس راس ا پر کے ماس سے
ما پر اور مرتب سے ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) ن ما = ن س
اور (۲) ن ما × ماسے = ا س × س ن

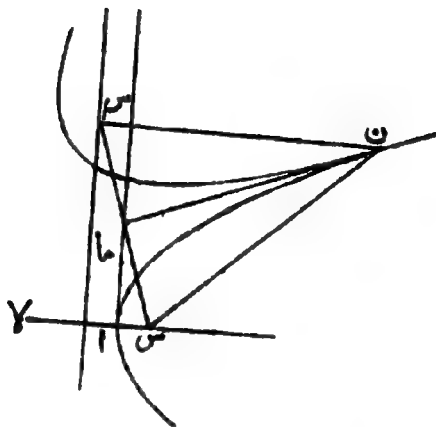
(۹) مکافی کا ماسکہ محور اور ایک ماس معلوم ہیں۔ مکافی کو مرسم کرو۔

(۱۰) مکافی کا ماسکہ س مکافی پر کا ایک نقطہ ن اور س سے
ن پر کے ماس پر کے عمود کا طول معلوم ہیں، مکافی کو مرسم کرو۔

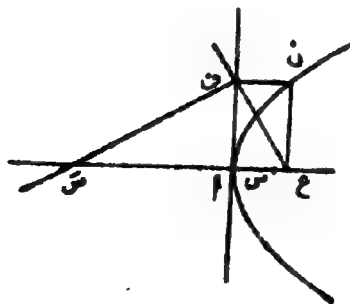
(۱۱) مکافی کا ماسکہ ایک ماس اور وتر خاص کا طول معلوم ہیں۔
مکافی کو مرسم کرو۔

(۱۲) ایک مکافی ایک اور مساوی مکافی پر (جو ثابت ہے) اس
طرح ٹوٹھکتا ہے کہ ابتداؤ ان کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔
ثابت کرو کہ لڑھکنے والے مکافی کا ماسکہ ثابت مکافی کے مرتب پر
حرکت کرتا ہے۔

[اشارہ - کسی ایک مقام پر مکافیوں کے راسوں سے نقطہ تماس
ن تک قوس کے طول مساوی ہونگے اس لیے نقطہ تماس کے ماسکی فاصلے
ن س، ن س، س س، س س اور نقطہ تماس ن پر کا مشترک ماس
ن ما ماسوں کو ملنے والے خط س س کی عمودی تنصیف ما پر کے
اور یہ نقطہ تقاطع ما ہمیشہ ثابت مکافی کے ماس ا پر کے ماس سے ملے گا۔]



ہوگا۔ اس لیے سواکلے والے مکانی کا ماسک میں ثابت مکانی کے مرتب ہوگا۔
(۱۳) مکانی کے کسی نقطہ سے عمود پر عمود ن ع احد رأس پر کے پاس
پر عمود ن ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کو کہ ع ف ایک ثابت مکانی کو مس کرتا ہے



ف سے ایک خط ف من ' ف ح پر عہدہ وار کینچن چڑیے ہوئے مکلف

عمر سے سن پر لے۔

قائم الزادہ مثلث $ع ف س$ میں $ا ف ا = ع ا \times ا س$ (۱)

لیکن $ا ف = ع ا$

نیز $ع ن = ا س \times ع ا$

اس لیے $ا ف ا = ا س \times ع ا$ (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$ا س = ا س$

اس لیے $س$ ایک مثبت نقطہ ہے۔

اس لیے $ف ع$ ایک مکانی کو $س$ سے کرتا ہے جس کا $ا س$ سے ہے اور جس کے $ا س$ پر کا $ا س$ $ا ف$ ہے۔

(۱۴) ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو ایک ثابت خط جنی نقطوں پر قطع کرتا ہے، ان نقطوں پر دائروں کے مماسات کھینچے گئے ہیں ثابت کیا کہ یہ مماسات ایک ثابت مکانی کو $س$ سے کرتے ہیں۔

(۱۵) مکانی کے $ا س$ سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو

مکانی کے کسی $ا س$ سے ایک دیے ہوئے زاویہ پر ملتا ہے۔ ثابت کیا کہ $ا س$ اور اس خط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

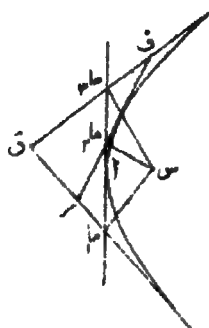
[مطلوبہ طریق مکانی کا ایک $ا س$ ہے جو محور کے ساتھ دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بناتا ہے]

۳۔ اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے ایک مکانی کو

مس کریں تو مثلث کا حائلہ دائرہ مکانی کے $ا س$ میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ مثلث $ف ق س$ کے ضلعے مکانی کو $س$ سے مس کریں
 $ا س$ میں سے مثلث کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائوں کا حائلہ

میں اندر وہ دفعہ ۳۵ کی رُو سے راس ۲ پر کے ماسکس پر واقع ہیں۔



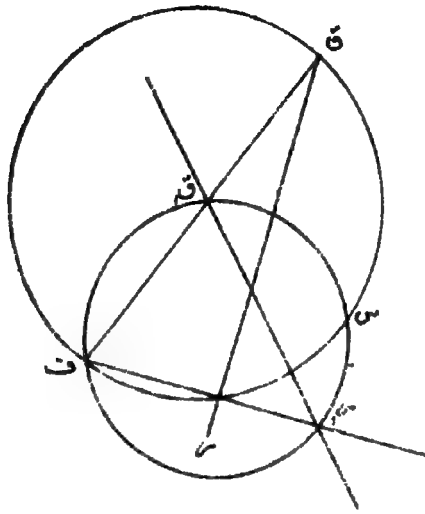
یعنی ماسکس سے مثلث ق س ف کے ضلعوں کے عمودوں کے ہیں
ایک خط مستقیم میں واقع ہیں۔
اس لیے مثلث ق س ف کا حاطہ دائرہ ماسکس میں سے گزرتا ہے۔

امثلہ ۱۱

(۱) اُس مکافی کے ماسکس کا طریق معلوم کروں گا کہ ایک دیے ہوئے
مثلث کے تینوں ضلعوں (مدودہ بشرط ضرورت) کو مس کرتا ہے۔
(۲) ثابت کرو کہ بالعموم صرف ایک مکافی ایسا کھینچ سکتا ہے جو چار
دیے ہوئے خطوط مستقیم کو (جن میں سے کوئی دو متوازی نہیں ہیں اور کوئی
تین متوازی نہیں ہیں) مس کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ دیے ہوئے چار خطوں سے بننے والے چار مثلثوں
میں سے دو مثلث ق س ف اور ق س ف ہیں، ان مثلثوں کے
ضلعوں کو مس کرنے والے مکافی کا ماسکس ان مثلثوں کے حاطہ دائرہ میں
دوسرے نقطہ تقاطع میں واقع ہوگا۔ اور اس سے دیے ہوئے خطوط

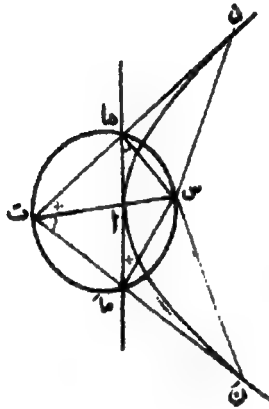
عمودوں کے پائیں میں سے گزرنے والا خط مستقیم راس پر کا ماس ہوگا۔



اب چونکہ ماسکہ اور راس پر کا ماس معلوم ہیں اس لیے مکانی ترسم ہو سکتا ہے۔
نوٹ - علم ہندسہ مستوی کی مدد سے ثابت ہو سکتا ہے کہ دیے ہوئے
چار خطوط سے بننے والے چار مثلثوں کے محیط دائرے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں
(۳) ایک مثلث کے اضلاع مکانی کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث
کا عمودی مرکز مکانی کے مرتب پر واقع ہوگا۔

[فرض کرو کہ مثلث ف ق س کے اضلاع مکانی کو (جس کا ماسکا
س ہے) مس کرتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز وہ
ہیں معلوم ہے کہ بجائے مثلث ف ق س کے اس کا خط پائیں میں
کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور چونکہ اس کا خط پائیں مکانی
راس پر کا ماس ہے اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ وہ مکانی
مرتب پر واقع ہے۔]

(۴) ایک مکانی کا اسکے میں ہے اور مکانی پر کے نقاط اور
پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہے، چاہے اگر وہ مختلف مسات
اور مسات متساوی ہیں۔



[فرض کرو کہ مکانی کے رأس ۱ پر کا ماس مسات ن
اور ت ن سے بالترتیب ما اور ما پر ملتا ہے، تب زاویہ
مس ماس اور مس ماس دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے
مس 'ما' ت، ما مشترک محیط ہیں۔

اس لیے $\angle مس ت ما = \angle مس ما ما$
لیکن دفعہ ۳ کی فرع (۱) کی رو سے

$\angle مس ما ما = \angle مس ن ما$

اس لیے $\angle مس ت ن = \angle مس ن ت$

اسی طرح $\angle مس ن ت = \angle مس ت ن$

اس لیے مختلفات مس ن ت اور مس ت ن متساوی ہیں۔

(۵) اوپر کے سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر مکانی کے نقطہ
ن اور ن پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہو تو \angle ت م ن = \angle ن م ن
یعنی مکانی کے ماسوں کے مقابل ماسک پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ (طالب کا
دفعہ ۳۶ طریقہ دوم کا نوٹ)

(۶) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ م ن ت = م ن ب م ن

(۷) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ $\frac{م ن}{ت م ن} = \frac{م ن}{ب م ن}$

(۸) سوال ۴ کی مدد سے اس مسئلہ کا متبادل ثبوت ہم پہنچاؤ کہ
مکانی کے کسی تین ماسوں سے بننے والے مثلث کا مائل دائرہ ماسک میں سے
گزرتا ہے۔

(۹) ط ن اور ط م مکانی کے دو ماس ہیں، ن ط کو کسی نقطہ
تک خارج کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ \angle ن ط م = \angle ن م ط
یعنی مکانی کے کسی دو ماسوں کے درمیان کا خارجی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی
ہوتا ہے جو ان میں سے کسی ایک ماس کے محاذی ماسک پر بنتا ہے۔
(۱۰) مکانی کا وتر ن م محمد پر عمود وار ہے۔ کسی آئہ نقطہ پر کا
ماس نقاط ن اور م پر کے ماسات سے ت اور م پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ م ت = م م ت

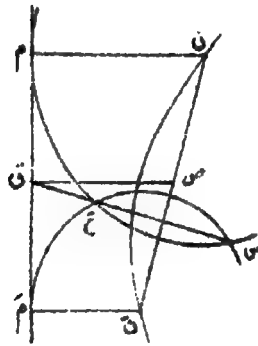
(۱۱) مکانی کے کسی ماس پر نقاط اور ت ایسے چے گئے ہوں
کہ م ت = م م ت ثابت کرو کہ ت اور م سے مکانی
دوسرے ماسات ایک دوسرے کو محمد پر قطع کرتے ہیں۔

۳۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک مکانی کے متوازی وتروں کو

ایک نظام جو تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوں
جو محمد کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا کوئی ایک وتر ن ہے،

مرتب پر عمود $ن م$ اور $ن م$ نکالو اور $ن$ کو مرکز مان کر بالترتیب
 $ن م$ اور $ن م$ کی دوئی پر دائرے کھینچو۔ یہ دائرے لازماً پاسکے میں
 سے گزرینگے اور مرتب کو بالترتیب نقاط $م$ اور $م$ پر مس کرینگے۔



فرض کرو کہ دائروں (ن) ' (ن) کا دوسرا نقطہ تقاطع ح ہے۔
 تب ان دائروں کا وتر مشترک $م ق$ مرکزوں کے خط $ن ن$ پر عمود
 ہوگا۔

فرض کرو کہ ان دائروں کا وتر مشترک $س ع$ مرتب سے $ق$ پر
 تب $ق م = ق ح \times ق س = ق م^2$

اس لیے $ق م = ق م$

یعنی $م م$ کا وسطی نقطہ $ق$ ہے۔

نیز چونکہ $س ق$ عمود وار ہے $ن ن$ پر جس کی سمت متعین ہے
 ق ایک ثابت نقطہ ہے۔

اب $ق$ میں سے ایک خط $ق م$ محور کے متوازی کھینچو جو وتر $ن$
 سے $س$ پر ملے۔ تب ظاہر ہے کہ $س$ وسطی نقطہ ہوگا $ن ن$

اس لیے متوازی وتروں کے دیے ہوئے نظام کے کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ ص اس خط مستقیم پر ہوگا جو ثابت نقطہ ق میں سے گزرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔ یعنی مکافی کے متوازی وتروں کے کسی دیے ہوئے نظام کے وسطی نقطوں کا طریقی ایک خط مستقیم ہے جو محور کے متوازی ہے۔

تعریف۔ مکافی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریقی کو قطر کہتے ہیں اور جہاں یہ قطر مکافی کو قطع کرتا ہے اُس نقطہ کو قطر کا سرا کہتے ہیں۔

نوٹ۔ مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مکافی کا ہر قطر محور کے متوازی ہے۔

فرض ۷۔ اگر مکافی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر مکافی سے ϵ پرے تو ϵ پر کا ماس اس نظام کے وتروں کے متوازی ہوگا۔

ϵ میں سے ایک خط اس نظام کے وتروں کے متوازی کھینچو فرض کرو کہ یہ خط مکافی سے ϵ پر ملتا ہے۔ تب ϵ کا وسطی نقطہ ϵ پر ہوگا یعنی ϵ کا وسطی نقطہ ϵ ہوگا جو صرف اسی صورت میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ ϵ پر منطبق ہو۔

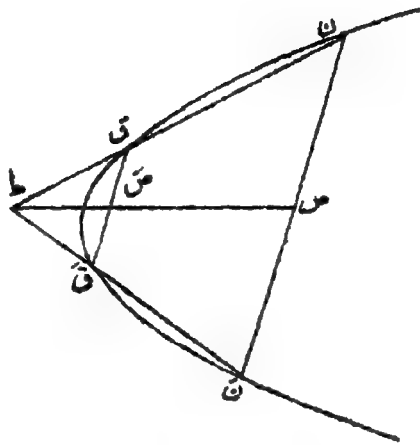
اس لیے وہ خط جو ϵ میں سے گزرتا ہے اور نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ ϵ پر مکافی کا ماس ہے۔

یعنی مکافی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے قطر کے سرے پر کا ماس ان وتروں کے متوازی ہوگا۔

۳۹۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی وتر کے سروں پر ماس ایک دوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو دیے ہوئے وتر کی تنصیہ کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مکافی کا ایک دیا ہوا وتر n ہے ایک اور وتر

دورن ن کے متوازی کھینچو۔



فرض کرو کہ ن ق اور ق ق کے وسطی نقطے بالترتیب ص اور ص
ہیں۔ تب ص ص میں سے گزرنے والا خط مکانی کا ایک قطر ہو گا۔
فرض کرو کہ ن ق قطر ص ص سے ط پر ملتا ہے۔

$$\text{تب } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

لیکن ازروئے عمل ص ن = ص ق اور ص ق = ص ق

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

اس لیے ن ق ط ایک خط مستقیم ہے۔

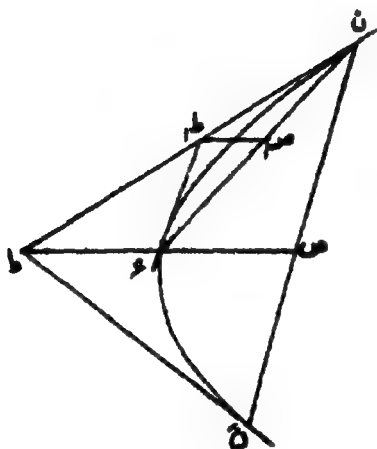
یعنی ن ق اور ن ق کا نقطہ تقاطع ط ص میں سے گزرنے والے
قطر پر واقع ہے۔

اب فرض کرو کہ دور ق ق اپنے متوازی حرکت کرتا ہو اور ن
کے قریب آ جاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب انتہا میں $ن ق$ اور $ن ق$ بالترتیب $ن$ اور $ن$ پر کے ماس بن جائینگے۔

پس ثابت ہوا کہ وتر $ن$ کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو وتر $ن$ کی تنصیف کرنے والے قطر پر قطع کرتے ہیں۔

۴۰۔ اگر مکافی کے کسی وتر $ن$ کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو $ط$ پر قطع کریں اور $ط$ میں سے گزرنے والا قطر مکافی سے $ع$ اور $ن$ سے $ص$ پر ملے تو $ط ع = ع ص$



ہیں معلوم ہے کہ $ط$ میں سے گزرنے والا قطر وتر $ن$ کی تنصیف کرتا ہے اور $ع$ پر کا ماس $ن$ کے متساوی ہے۔ [بہجہ دفات ۲۸، ۲۹]
 فرض کرو کہ $ع$ پر کا ماس $ن$ سے $ط$ پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ $ط$ میں سے گزرنے والا قطر $ن$ سے $ع$ پر ملتا ہے۔
 تب وضعہ ۳۸ کی زمرہ کی نو سے $ن$ کا وسطی نقطہ منہگا۔

اب مثلث ن ع ط میں ص ط ایک خط ہے جو ن ع کے وسطی نقطہ
ص میں سے گزرتا ہے اور ع ط کے متوازی ہے۔

اس لیے $ن ط = ط ع$
اب مثلث ن ص ط میں ط ع ایک خط ہے جو ن ط کے
وسطی نقطہ ط میں سے گزرتا ہے اور ن ص کے متوازی ہے۔
اس لیے $ط ع = ع ص$

امثلہ ۱۲

(۱) مکافی کے متوازی دتروں کا ایک نظام ہے۔ ان دتروں میں سے
ہر ایک کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ مکافی کے ماسک میں سے مکافی کے کسی دتر پر کا
اور اس دتر کی تنصیف کرنے والے قطر کا نقطہ تقاطع مرتب پر ہوتا ہے۔

(۳) اگر مکافی کے متوازی دتروں میں سے ہر ایک محور کے ساتھ م
زاویہ بنائے تو ان دتروں کی تنصیف کرنے والا قطر وتر خاص کے ایک سر
میں سے گزرے گا۔

(۴) ایک مکافی کا قند پر کھینچا ہوا ہے۔ اس کا ماسک اور مرتب
معلوم کرو۔

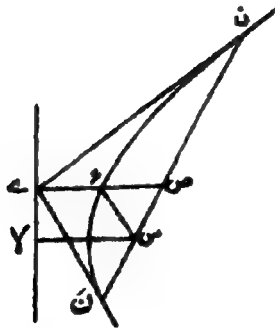
کوئی دو متوازی دتر ن اور ق ق کھینچو۔

تب ان کے وسطی نقطوں ص، ص میں سے گزرنے والا خط مکا
کے محل کے متوازی ہوگا۔

ن سے ص ص پر عمود نکالو اور اسے اتنا خارج کرو کہ یہ مرکز مکا
ن پر پڑے۔

ن ن کے وسطی نقطہ ع میں سے ص ص کے متوازی خط کھینچو
مکافی سے ا پر پڑے، تب ۱ مکافی کا رأس ہوگا اور ۲ ع محل ہوگا۔

مثل مثال ہو سکتا ہے جس سے ماسک اور مرتب معلوم ہو سکتے ہیں۔
 (۵) ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور اس میں سے
 وتر ا ق کیچھا گیا ہے جو ن ن کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ
 $س ن = س ق = ا ق$
 (۶) اگر سوال بالا میں ن ع اور ق ع محور پر عمود ہوں تو
 ثابت کرو کہ $ع ق = ا ق$
 (۷) مکانی کے کوئی دو وتر محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں
 میں بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دتروں کے وسطی نقطے محور سے
 متساوی الفصل ہیں۔
 (۸) ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن ن کی تنصیف
 کرنے والا قطر مکانی سے ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن ق = س ع$
 [ماسکی دھروں کے سروں ن ن پر کے ماس ایک دوسرے کو



مرتب پر کے ایک نقطہ سے پر عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اور ن ن کے وسطی
 نقطہ سے میں سے گزرنے والا قطر بھی سے میں سے گزرتا ہے۔ نیز $س ع = ع س$

قائم الزاویہ مثلث سے ن ن میں

ن ن = ۲ ص سے = ۴ ع سے = ۴ س ع
(۹) سوال ۸ کی مد سے مکانی کا ایک ماسکی وتر کھینچو جس کا طول

معلوم ہو۔

(۱۰) اگر مکانی کے دو ماسکی وتر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یہ محور

کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۱) مکانی کا وتر خاص سب سے چھوٹا ماسکی وتر ہے۔

(۱۲) مکانی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع

اور عمادوں کے نقطہ تقاطع کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوتا ہے۔

(۱۳) مکانی کے نقطہ ن پر کا عماد مکانی سے مکرر ن پر ملتا ہے۔

ن پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع ت میں سے گزرنے والا نقطہ

مکانی سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ق ماسک میں سے گزرتا ہے۔

(۱۴) ن ن اور ق ق مکانی کے دو متوازی وتر ہیں اور

پر کے ماسات ق ق مودہ سے ت اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ق ت = ق ت

امثلہ ۳

(مکانی پر متفرق سوالات)

(۱) اگر مکانی کے ایک وتر کا طول اس وتر کے وسطی نقطہ اور مرتب کے درم

قاصد کا دو چند ہو تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ماسک میں سے گزرے گا۔

(۲) ایک دھڑے قاعدہ اب پر ایک متساوی الساقین مثلث

اب م بنایا گیا ہے اور قاعدہ ام پر ایک اور متساوی الساقین مثلث

ام ن مثلث اب م کے تشابہ بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن

مکانی ایک مکانی ہے جس کا ماسک اسے اور میں کا مرتب اب

مردی منقہ ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک ثابت خط پر کوئی نقطہ ق ہے
ق سے ثابت خط پر عمود ق ن کیسپا گیا ہے اور ا ن عمود ہے ا ق پر
ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکانی ہے جس کا مرکز ا ہے۔

(۴) ن م ن مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے اور ن اور ن میں سے مور کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو ن اور ن پر مادوں سے بالترتیب ق، ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق ق ایک معین ہے۔

[۱ اشارہ - چونکہ ن م ن ایک ماسکی وتر ہے اس لیے ن اور ن پر کے مساوات علی القوائم ہیں۔ اس لیے ن پر کا عا د ن پر کے ماس کے متوازی ہے۔ اس لیے $\angle ن ق ق = \angle ن ق ن$ یعنی $ن ق ق = ن ق ن$ اس طرح $ن ق ق = ن ن ن$]

(۵) ایک مکانی بناؤ جو تین دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور جس کا ماسک ایک دیے ہوئے خط پر ہو۔

(۶) ثابت کرو کہ مکانی کے دو ثابت ماسوں اعداد ایک متغیر ماس سے بننے والے مثلث کے جانب دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(6) مکانی کے کسی نقطہ پر کے ماس پر راس اسے عمود نکالا گیا ہے جو ن میں سے گزرنے والے اور محور کے متوازی خط سے قی پر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ قی کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکانی کے محور پر عمود وار ہے۔

|| اشارہ - فرض کر دو کہ ن پر کا ماس عمود سے ت پر ملتا ہے۔

نہ اس سے محروم پروردگار، قیام نکال۔ تب مثلثات ن ست ع
اور اقام قشایہ چرخی۔ اس لیے ام × ح ت = ن ع = ۲۴ × ۱۸
اس لیے ام = ۱۲ [اس]

(۸) مکانی کے نقطہ ن پر کا عادمور سے گل پر ملتا ہے۔
عایت کرد کہ ن گل مکانی کے اُس متین کے مساوی ہے جو ن گل کی تنصیف کرتا ہے۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ن گ کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والا مستقیم

مکافی سے سر پر اور محور سے م پر ملتا ہے۔ ن سے محور پر عمود ن ع نکلاؤ

تب $م ع = \frac{۱}{۲} ع گ = اس$

اب $م اس = ۲ اس \times اس = ۲ اس \times اس + اس \times اس$

$= ن ع + ع گ = ن گ$

(۹) مکافی کا کوئی نقطہ ن ہے اور ماسک م سے ان پر کا محور

رأس پر کے ماس سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا مین $۲ اس$ کے مساوی ہے۔

(۱۰) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کا مین ن ع ہے اور ن پر کا

ماس رأس پر کے ماس سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماس ہمیشہ

ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے مکافی کے مساوی ہے۔

[اشارہ - ماس پر عمود وار ماس کی پینچو جو محور سے م پر

ملے۔ ثابت کرو کہ $اس = اس$]

(۱۱) ن م ن اس مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے جس کا رأس

ا ہے اور ان اور ان وتر ماس سے ک اور ک پر ملتے ہیں۔

اگر ن ع اور ن ع محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ ع ن م ک

اور ع ن م ک دونوں متوازی الاضلاع ہیں

[اشارہ - $\frac{م ک}{اس} = \frac{ع ن}{ع ا} = \frac{ع ن}{ع م}$]

یعنی ع ن \times م ک = $۲ اس$ ، لیکن اضلاع سوال (۲)

کی رُو سے ع ن \times ع ن = $۲ اس$ ۔ اس لیے م ک = ع ن

اسی طرح سے م ک = ع ن

(۱۲) دو مکافیوں کا ماسک مشترک ہے اور ان کے مشترک ماس پر کے

کسی نقطہ سے مکافیوں کے دوسرے ماسات کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان آخری دو ماسوں کا درمیانی زاویہ مکافیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے



ساوی ہے -

(۱۳) متعدد مکانی کھینچے گئے ہیں جو ایک دیے ہوئے نقطہ ہیں سے
گزرتے ہیں اور جن کا مرتب ایک دیا ہوا خط ہے۔ بتاؤ کہ ان میں سے ہر ایک مکانی
ایک اور ثابت مکانی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ دیا ہوا نقطہ ن ہے۔

[اشارہ - دیے ہوئے نقطہ ن سے دیے ہوئے مرتب م لا

پر عمود ن م نکالو اور ن م محدودہ پر نقطہ ل ایسا لو کہ م ل = ن م
اور ل میں سے دیے ہوئے مرتب کے متوازی ل ل کھینچو۔ فرض کرو کہ
مکانیوں کے دیے ہوئے نظام سے کسی ایک رکن کا ایک ماسکی وتر ن س ن
ہے۔ ن سے ل ل پر عمود ن ل نکالو اور ثابت کرو کہ ن ن = ن ل

یعنی ن اس مکانی کا ایک نقطہ ہے جس کا ماسکہ ن اور مرتب ل ل ہے
نیز چونکہ لن دونوں مکانیوں کے نقطہ ن پر کا ماس زاویہ ن ن ل کا اندرونی
منصف ہے، اس لیے یہ دونوں مکانی ایک دوسرے کو ن پر مس کرتے ہیں [

(۱۴) مکانی کے نقطہ ن پر کا ماس محور سے ط پر ملتا ہے اور
ن ق ایک وتر ہے جو محور کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو ن پر کا ماس
بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق = م ن ط -

(۱۵) ایسے مکانی کھینچے گئے ہیں جن کا مشترک راس ا ہے
اور جو ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکانیوں
کے مرکبوں کا لغات ایک مکانی ہے جس کے وتر خاص کا طول ا ن کے
ساوی ہے۔

[اشارہ - اے ا ن پر عمود ا ل کھینچو جو دیے ہوئے نظام کے
ایک مکانی کے مرتب سے ل پر ملے اور ل میں سے محور کے متوازی ایک
خط کھینچو جو ا ن سے و پر ملے۔ ثابت کرو کہ ل ل = ا ح ن اور و = ا ح ن [

(۱۶) ایک دیے ہوئے قاعدہ اب پر ایک مساوی اساقین
خلث اب ج بنایا گیا ہے۔ اور ا اور ج پر مثلث اب ج کے
مائل دائرہ کے ماس ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ن کا طریق ایک مکانی ہے جس کا اسکے 'ا' اور 'اب' پر ہے 'اد' جس کے
ویر خاص کا لول 'اب' کے مساوی ہے۔

(۱۷) ایک حقیقہ دائرہ جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ میں ہے دو ثابت
متوازی خطوط کو بالترتیب 'ا'، 'اد' 'ب' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ
خطوط 'اب'، 'اب'، 'اب'، 'اب' ایک ثابت مکانی کو س کرتے ہیں۔

(۱۸) مکانی پر کے کسی نقطہ ن کے معین ن ع پر نقطہ قی اس طرح

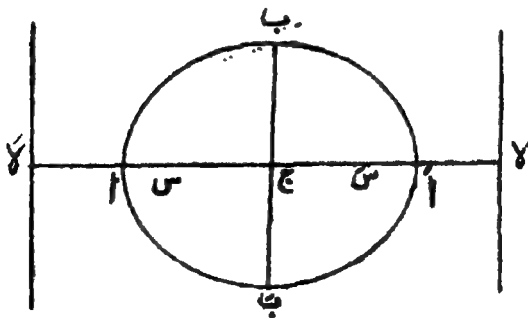
لیا گیا ہے کہ $\frac{ع ق}{ع ن} = \text{مستقل}$ ثابت کرو کہ قی کا طریق ایک آدھ مکانی ہے۔



تیسرا باب

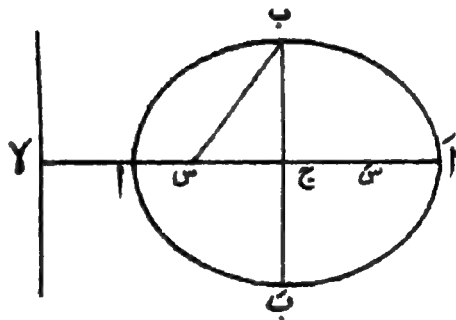
ناقص

۴۱۔ دفعہ (۱) کی تعریف کے بموجب ناقص ایک مخروطی ہے جس کا خروج مرکز ز ۱۔ پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ناقص ایک ہندسیہ بیضوی منحنی ہے جس کے دو تشاکل کے محور ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز پر عموداً قطع کرتے ہیں اور جن میں سے ایک محور ۱۱ مرتب پر عمود وار ہے۔



بہر محور ب ب مرتب کے متوازی ہے۔ نیز محور ا ا پر دو ماسکے
درسن واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب ہیں جو ا ا
وار ہیں اور ا ا محدودہ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب
لا پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج س : ج ا = ج لا : ج لا = ز
یا میں سے گزرنے والے محور کے سرے ا اور ا ناقص کے راس
تے ہیں۔

۴۲۔ مسئلہ۔ محور ب ب چھوٹا ہے محور ا ا سے
ج ب ا = ج ا - ج س
دفعہ ۸ کی رو سے ج س ج ا = ز × ج لا = ج ا (بوجہ نتیجہ ۲ دفعہ)



ثم الزاویہ مثلث س ج ب میں
ضلع ج ب > وتر س ب = ج ا
اس لیے ب ب ا > ا ا
ج ب ا = س ب ا - ج س ا = ج ا - ج س ا
نوٹ (۱) چونکہ ماسکوں میں سے گزرنے والا محور ا ا بڑا ہے محور ب ب سے
یہ ناقص میں ا ا کو محور اعظم اور ب ب کو محور اصغر

کہتے ہیں۔ ترقیم۔ نیم محور اعظم ج ۱ کے طول کو بالمعوم اے اور نیم محور اصغر ج ب کے طول کو بالمعوم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ (۲) چنگ ج س = ز × ج ۱

اس لیے رشتہ ج ب = ج ۱ - ج س ہو جاتا ہے

ج ب = ج ۱ (۱ - ز)

یعنی اوپر کی ترقیم کے مطابق ب = ج ۱ (۱ - ز)

اس رشتہ کی مدد سے اگر مقادیر ا و ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

نوٹ (۳) ۱ س × ۱ س = (ج ۱ - ج س) (ج ۱ + ج س)

= ج ۱ - ج س

= ج ب

نوٹ (۴) چونکہ بموجب نتیجہ ۱ دفعہ ۵

ج ۱ = ج س × ج ۲

اس لیے ج ب = ج س × ج ۲ - ج ۱

= ج س [ج ۲ - ج ۱]

= ج س × ج ۳

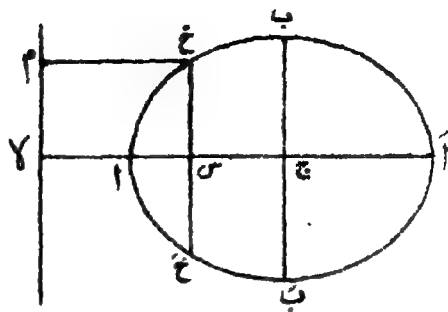
۴۳۔ مسئلہ۔ ناقص کا نیم وتر خاص نیم محور اعظم اور

نیم محور اصغر کا تیسرا متناسب ہے یعنی $\frac{ج ۱}{ج ب} = \frac{ج ۲}{ج س}$

وتر خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

چونکہ خ ناقص پر کا نقطہ ہے اس لیے $\frac{ج ۲}{ج م} = ز$

$\frac{ج ۲}{ج ۱} =$



$$س \times خ = ج \times ب$$

$$ج \times س = م \times ا$$

$$ج \times ب =$$

(ہر بیضی ۴۲ دفعہ)

$$\frac{ج \times ب}{س \times خ} = \frac{ج \times ب}{ج \times ب}$$

نوٹ :- مسئلہ بالا میں منمنّا حاصل ہوا کہ نیم وتر خاص س خ = $\frac{ج \times ب}{ج \times ا}$

ہمیں نیم وتر خاص کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی

$$ل = \frac{ب}{ا}$$

امثلہ ۱۴

(۱) ناقص کے ایک محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی مخالفت جانبوں میں پیچے گئے ہیں جو محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان خطوط کے طول مساوی ہیں۔ نیز اس کا مکس بیان کرو اور اسے بھی ثابت کرو۔
 (۲) اگر دو مساوی ناقصوں کا مرکز ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ ان کے
 نقاط تقاطع دو علی القوائم قطروں کے سروں پر ہونگے۔
 (۳) دو نقاط a اور b کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو
 کہ ناقص ٹکلیہ an خطوط کے درمیان واقع ہے جو a اور b میں سے محور
 a پر عمود وار ہیں۔

(۴) اگر نقطہ n ناقص پر a سے a تک حرکت کرے تو ثابت کرو کہ
 ماسکی فاصلہ mn کا طول m سے a تک بڑھتا ہے۔
 (اشارہ)۔ اگر n سے a پر عمود nc ہو تو $mn = nc$ کا
 اور c کی جھوٹی سے جھوٹی قیمت a کا ہے اور بڑی سے بڑی قیمت a کا ہے۔
 (۵) اگر ایک مکانی اور ایک ناقص کے ماسکے اور مرتب مشترک ہوں
 تو ثابت کرو کہ مکانی ٹکلیہ ناقص کے باہر واقع ہوگا۔
 (۶) ناقص کے محور اعظم کے سرے a اور ماسکے m کے مقام
 معلوم ہیں۔ ناقص کا خروج المکرر اور محور اصغر کا طول معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ m سے a = a - m ۔
 (۸) اگر c سے b سے قائم ہو تو ناقص کا خروج المکرر معلوم کرو۔
 (۹) ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو محور اصغر کے ایک سرے b میں سے
 گزرتا ہے اور محور اعظم کو ماسکے m پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس
 دائرہ کا قطر = $\frac{a}{b}$

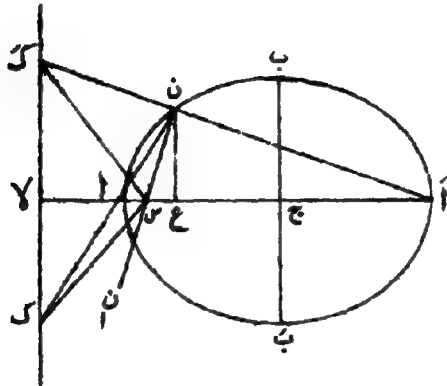
(۱۰) ناقص کے محور اعظم کے سرے a معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ
 ماسکے m میں سے گزرنے والے وتر خاص کے سروں x ، x' کا طریق
 ایک مکانی ہے جس کا محور a کے عمودی ناصف پر ہے۔

۴۴ - تعریف۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ n سے محور اعظم پر

عمود nc ہو تو n کو n کا سین کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ کا معین ن ع ہو تو

$$\frac{\text{ج ب}^2}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ع ا}}$$



فرض کرو کہ ن ا اور ن ا ماسکس کے جواب کے مرتب سے بالترتیب
ک اور ک پر ملتے ہیں۔ س ک اور س ک کو ملاؤ اور ن س کو ملا کر کسی
نقطہ ن تک خارج کرو۔

تب متشابه مثلثات ا ن ع اور ا ک ل سے

$$(۱) \quad \frac{\text{ا ک}}{\text{ا ل}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ا ع}}$$

نیز متشابه مثلثات ا ن ع اور ا ک ل سے

$$(۲) \quad \frac{\text{ا ک}}{\text{ا ل}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ا ع}}$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \quad \frac{\text{ا ک} \times \text{ا ل}}{\text{ا ل} \times \text{ا ل}} = \frac{\text{ن ع}^2}{\text{ا ع} \times \text{ا ع}}$$

نیز س ک اور س ک بالترتیب زاویوں اس ن اور اس ن کے منصف میں (موجب دفعہ ۱۱)۔

اس لیے زاویہ س ک قائم ہے
لہذا س ک لا × ک لا = س لا^۲ (۴)

اس لیے رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$\frac{س لا^۲}{۱ لا \times لا^۲} = \frac{ن ع^۲}{۱ ع \times ع^۲}$$

لیکن $\frac{س لا^۲}{۱ لا \times لا^۲}$ ایک مستقل مقدار ہے۔

اس لیے $\frac{ن ع^۲}{۱ ع \times ع^۲}$ کی قیمت ن کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اب اس خاص صورت میں جبکہ نقطہ ن محور اسفر کے سرے ب پر منطبق ہو۔

$$\frac{ن ع^۲}{۱ ع \times ع^۲} \text{ ہو جاتا ہے } \frac{ج ب^۲}{۱ ج \times ج^۲}$$

$$\text{پس ثابت ہوا کہ } \frac{ن ع^۲}{۱ ع \times ع^۲} = \frac{ج ب^۲}{۱ ج \times ج^۲}$$

$$\text{نوٹ (۱) چونکہ } ۱ ع \times ع^۲ = (۱ ج - ج ع) (ج + ج ع) = ج ا^۲ - ج ع^۲$$

$$\text{اس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے } \frac{ن ع^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} = \frac{ج ب^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} \text{ یعنی } \frac{ن ع^۲}{ج ا^۲} = \frac{ج ب^۲}{ج ا^۲} - \frac{ج ع^۲}{ج ا^۲}$$

$$۱ = \frac{ج ع^۲}{ج ا^۲}$$

$$\text{یعنی } \frac{ج ع^۲}{ج ا^۲} + \frac{ن ع^۲}{ج ب^۲} = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

اب اگر ا ج ا اور ب ج ب کو حوالہ کے محور مانا جائے اور نقطہ

ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو ج ح = لا (فضلیہ) اور ج ن = ما (معلیٰ)

$$\text{اور نتیجہ بالا (۱) ہو جاتا ہے: } ۱ = \frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ا^۲} \dots \dots \dots (۲)$$

اں پر کے کسی نقطہ ن کے محدود (لا، لا) اس رشتہ (۲) کو پورا

اس لیے یہ رشتہ یعنی $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ ناقص کی مساوات ہے۔

نوٹ (۲) اگر (لا، لا) ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ پر کا ایک نقطہ

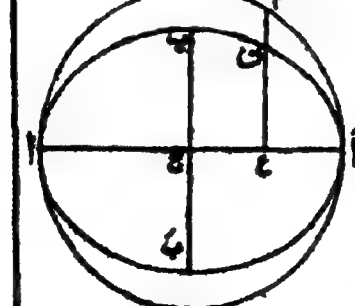
(لا، لا) اور (لا، لا) بھی ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں
نقطے بھی ناقص پر واقع ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ ناقص حوالہ کے
یوں ا اور ب ب کے لحاظ سے متشاکل ہے۔ اس طریقہ سے
متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ "ناقص بلحاظ دو علی القوائم محدود
ہے۔"

نوٹ (۳) ناقص کی مساوات $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ

ہی قیمت بڑی نہیں ہو سکتی اور ا کی مددی قیمت بڑی
ہو سکتی ہے یعنی ناقص کا کوئی نقطہ اس مستطیل کے باہر
ہے جو ا، ا میں ا پر عمود وار خطوط اور ب، ب میں سے
پر عمود وار خطوط کیلئے بنتا ہے۔

۴۵۔ مسئلہ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع

ع ن محدودہ ا کے قطر کے دائرہ کون پر قطع کرے تو



$$\frac{ن ع}{ع ا} = \frac{ب ع}{ا ب}$$

$$\frac{ن ع}{ا ب} = \frac{ب ع}{ا ب} \times \frac{ا ب}{ا ب}$$

$$ن ع = ب ع$$

$$\therefore \frac{ن ع^1}{ن ع^2} = \frac{ج ب^1}{ج ب^2}$$

$$اس لیے \frac{ن ع^1}{ن ع^2} = \frac{ج ب^1}{ج ب^2}$$

نوٹ - اوپر کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ۱۱ قطر والے دائرہ پر کسی

نقطہ ن کے سین ن ع پر ایک نقطہ ن ایسا لیا جائے کہ $\frac{ن ع^1}{ن ع^2} = \frac{ج ب^1}{ج ب^2}$ تو

ن کا طریق وہ ناقص ہوگا جس کا محور اعظم ۱۱ ہے اور محور اصغر ب ہے۔

تعریفات (۱) ناقص کے محور اعظم ۱۱ کے قطر پر کھینچے ہوئے دائرہ کو ناقص کا امدادی دائرہ کہتے ہیں۔ اس کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ امدادی دائرہ کی مدد سے مندرجہ بالا ڈیٹ کے طریقہ کے مطابق ناقص حاصل ہو سکتا ہے۔
(۲) اگر خط ح ن ن محور اعظم پر عمود ہو اور ناقص سے ن پر امدادی دائرہ سے ن پرے تو نقاط ن اور ن متناظر نقطے کہلاتے ہیں۔

امثلہ ۱۵

(۱) ناقص کے ایک نقطہ ن کا سین ن ع ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے ع راس ۱ سے مرکز ج تک حرکت کرتا ہے سین ن ع کی قیمت مسلسل بڑھتی ہے۔
(۲) اگر ناقص پر کسی نقطہ ن سے محور اصغر ب پر عمود ن ع ہو تو

$$\text{ثابت کرو کہ } \frac{ن ع^1}{ن ع^2} = \frac{ج ب^1}{ج ب^2}$$

(۳) ۱۱ ایک محدود خط مستقیم ہے اور ایک متحرک نقطہ ن سے

۱۱ پر عمود ح ن ہے اگر $\frac{ن ع^1}{ن ع^2} = \frac{ج ب^1}{ج ب^2}$ ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا ایک محور ۱۱ ہے۔

(۴) اگر ناقص پر کسی نقطہ ن کے سین ن ع پر نقطہ ق اس طرح

۷۱ کے $\frac{ع ق}{ع ن} =$ مستقل تو ق کا طریق ایک اور ناقص ہوگا۔

(۵) دفعہ ۴۲ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص کے نیم وتر خاص کا

$$\frac{۲}{۳} =$$

(۶) ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے، ع ن محدود ہے

ق ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{ع ق}{ع ن} = \frac{ج ۱}{ج ب}$ ، ثابت کرو کہ ق کا

ایک دائرہ ہے جس کا قطر ا ا ہے۔

(۷) دائرہ (ج) کے ایک ثابت قطر ا ا پر دائرہ کے کسی نقطہ ن سے

عمود کھینچا گیا ہے۔ اور ع ن پر ایک نقطہ ن ایسا لیا گیا ہے کہ

$\frac{ع}{ج} = \frac{۳}{۵}$ ، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج مرکز

ہے۔

(۸) دفعہ ۴۴ کے مسئلہ کی شکل میں اگر زاویہ ع ج ن = ط تو

ن کرو کہ ناقص پر کے نقطہ ن کے عمود (ا ب م ط ب جب ط) ہیں۔

(۹) دفعہ ۴۵ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص بلحاظ

ج ب کے (جو ج میں سے گزرتا ہے اور ا ا پر عمود دار ہے)

کل ہے اور نیز اُس کا ایک اور ماسک اور اُس ماسک کے جواب کا

ہے۔

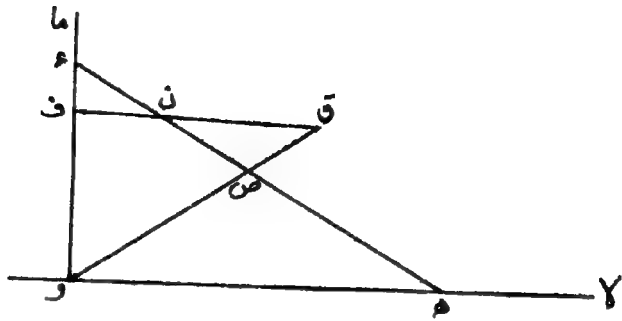
(۱۰) اگر ایک سلاخ ھ ھ اس طرح حرکت کرے کہ اُس کے سرے

ور ھ بالترتیب دو علی القوائم سلاخوں د کا، و ھ پر رہیں تو ثابت کرو

سلاخ پر کے کسی ثابت نقطہ ن کا طریق ایک ناقص ہوگا جس کے

ن محوروں کے طول ن ھ اور ن ھ ہیں۔

فرض کرو کہ سلاخ ھ ھ کا وسطی نقطہ ھ ہے



ن سے وما پر عمود ن ف نکاو اور فرض کرو کہ ن اور و
کا نقطہ تقاطع ق ہے۔

ظاہر ہے کہ و = ص اور ص ق = ص ن

اس لیے و ق = ن م جو مستقل ہے۔

اس لیے ق کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر
ن م کے مساوی ہے۔

نیز مشابہ مثلثات ن ف و اور ق ف و میں

$$\frac{ن ف}{ق ف} = \frac{ن و}{ق و} = \frac{ن م}{ن م} \text{ جو مستقل ہے۔}$$

اس لیے ن کا طریق ایک ہتھ ہے جس کے نصف محوروں کے طول
ن م اور ن و ہیں۔

نوٹ (۱) مندرجہ بالا طریقہ سے جیلی طور پر ایک سلاخ کی مسلسل
حرکت سے ناقص مرتسم ہو سکتا ہے۔ یہی ناقصی پرکار کا اصول ہے۔

نوٹ (۲) مندرجہ بالا شکل میں نقطہ ن سلاخ پر م اور و کے
درمیان لیا گیا ہے۔ اگر ن سلاخ محدودہ پر لیا جائے تو بھی طریق ناقص
ہوگا۔ طالب علم مناسب شکل کھینچ کر اس امر کی تصدیق کرے۔

(۱۱) ناقص پر کوئی دو نقطے n اور n' ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے متناظر نقطے N اور N' ہیں۔ ثابت کرو کہ n اور n' کا نقطہ تقاطع محورِ عظیم محدودہ پر ہے۔

(۱۲) سوال بالا کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطوں n اور n' پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع A محدودہ پر ہے۔

(۱۳) دائرہ کے متوازی وتروں کے نظام کے کسی ایک وتر nn' پر

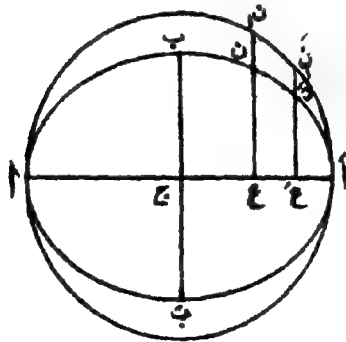
ایک نقطہ n ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{Cn}{Cn'}$ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ n کا طریق ایک ناقص ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کا وہ قطر جو nn' پر عمود ہے CC' سے E پر

ملاقاتا ہے، تب چونکہ $\frac{Cn}{Cn'}$ مستقل ہے اس لیے $\frac{Cn}{Cn'}$ بھی مستقل ہوگا

اس لیے n کا طریق ایک ناقص ہے جس کا امدادی دائرہ دیا جوا دائرہ ہے]

(۱۴) ناقص کے نیم محروں کے طول l اور b ہیں۔ ثابت کرو کہ ناقص کا



رقبہ πab ہے۔ ناقص پر ایک دوسرے کے قریب کے کسی دو نقطوں n اور n' سے

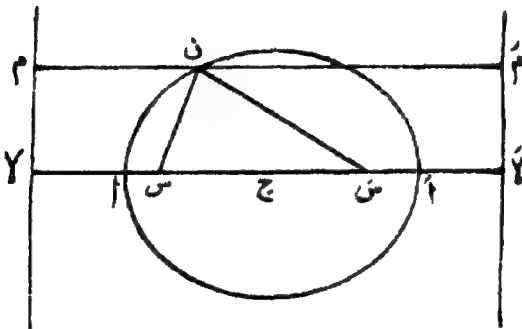
محور اعظم پر عمود ن ع اور ن ع نکالو اور فرض کرو کہ ح ن اور ع ن مسدودہ امدادی دائرہ سے بالترتیب ن اور م پر ملتے ہیں۔

$$\text{اب شکل ع ع ن ن کا رقبہ} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

اب محور اعظم پر عمود وار بہت سے خطوط کھینچ کر ناقص اور امدادی دائرہ کو ایسی بے شمار متناظر بیٹیوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی (شلاخ ع) بہت چھوٹی ہو۔ جیسا کہ اوپر بتایا جا چکا ہے۔ ناقص کی ہر بیٹی کے رقبہ کو امدادی دائرہ کی متناظر بیٹی کے رقبہ کے ساتھ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ر}}$ ہے، نیز ناقص کی جملہ بیٹیوں کا مجموعہ ناقص کا رقبہ ہے اور امدادی دائرہ کی متناظر بیٹیوں کا مجموعہ امدادی دائرہ کا رقبہ ہے۔

$$\text{اس لیے ناقص کا رقبہ} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \times \text{امدادی دائرہ کا رقبہ}$$

یعنی ناقص کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ر}} \times$ امدادی دائرہ کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ر}} \times \pi \times \text{ر}^2 = \pi \times \text{ب} \times \text{ر}$
 ۴۶۔ مسئلہ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور محور اعظم کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ
 ن س + ن س = ا ا

ن میں سے من کے متناظر مرتب پر مودن م اور من کے متناظر مرتب پر مود
ن م نکالو۔ تب م ن م خط مستقیم ہوگا۔
ناقص کی تعریف کے بموجب

$$ن س = ز \times ن م$$

$$اور ن م = ز \times ن م$$

$$اس لیے ن س + ن س = ز (ن م + ن م)$$

$$= ز \times م م = ۴۴$$

$$= ز \times ۲ ج ۲ = ۴$$

$$= ۲ ج ۲ (بوجب دفعہ نتیجہ ۲)$$

$$= ۱۱$$

نوٹ۔ اس سلسلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے ناقص مرتب
کرنے کا سہولت دہی جیسی طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

محدود طول والی ایک بے ٹوک رستی کے سروں کو دو ثابت نقطوں میں اور
میں پر کی دو کھینچوں کے ساتھ باندھ دو۔ ایک پینل کو اس طرح حرکت دو کہ
پینل کی ٹوک سے رستی ہمیشہ تہی رہے، تب پینل کی ٹوک ایک ناقص مرتب
کر دیں، کیونکہ اگر پینل کی ٹوک کا کوئی ایک مقام ن ہو تو ن س + ن س
= رسی کا طول جو مستقل ہے۔ اس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے ماسکے
میں اور من ہیں اور جس کے محور اعظم کا طول رستی کے طول کے مساوی ہے۔

امثلہ ۱۶

(۱) اگر ناقص کی سطح میں کوئی نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ق س + ق م
بڑا ہوگا ۱۱ ہے، اگر ق ناقص کے باہر ہو اور چھوٹا ہوگا ۱۱ ہے، اگر ق
ناقص کے اندر ہو۔

(۲) ن ج ن ناقص کا کوئی قطر ہے ثابت کرو کہ س ن + س ج

مستقل ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص کا محور اعظم ناقص کا سب سے بڑا وتر ہے۔

[فرض کرو کہ ناقص کا کوئی وتر n ہے]

$$m \cdot n > s \cdot n + s \cdot n \quad \text{نیز } n > s \cdot n + s \cdot n \text{ سے}$$

$$\text{اس لیے } n^2 > (s \cdot n + s \cdot n) + (s \cdot n + s \cdot n) = 4s^2 = 4 \cdot 1^2$$

$$\text{اس لیے } n > 2$$

(۴) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ

اس نقطہ کا طریق جو دونوں دائروں کے محیطوں سے متساوی الفاصل ہو ایک ناقص ہے۔

(۱) اشارہ۔ دائروں کے مرکوزوں سے متحرک نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ دائروں کے نصف قطروں کے مجموعہ کے متساوی ہے۔

(۵) اگر ناقص پر کا ایک نقطہ ایک ماسک اور محور اعظم کا طول معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ دوسرے ماسک کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۶) سوال ۵ میں ثابت کرو کہ ناقص کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۷) دو ناقصوں کا ایک ماسک مشترک ہے۔ اور ان کے محور اعظم کے طول

متساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ناقص دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتے۔

(۸) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر ماسکوں کو ملانے والے خط $s \cdot n$ کے

مماز بننے والا زاویہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ نقطہ مذکور محور اصغر کے کسی سرے پر ہو۔

(۹) ناقص پر کوئی نقطہ n ہے، ثابت کرو کہ $s \cdot n$ کا

خارجی ناصب ناقص کو کرر قطع نہیں کر سکتا۔ اس سے متنبہ کرو کہ $s \cdot n$ کا

خارجی ناصب نقطہ n پر ناقص کا ماسک ہے۔

(۱۰) اگر مثلث $s \cdot n$ کا اندرونی دائرہ $s \cdot n$ کو s پر مس کرے تو

ثابت کرو کہ n کا طول مستقل ہے۔

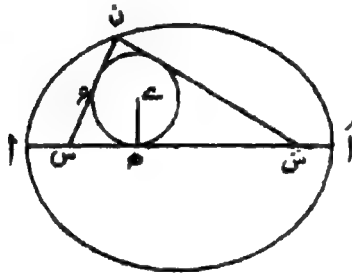
(۱۱) اگر $s \cdot n$ کا اندرونی دائرہ $s \cdot n$ کو s پر مس کرے تو ثابت کرو کہ

$$s = n$$

(۱۲) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے۔ اس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو ان دونوں دائروں کو مس کرتا ہے (دیکھو سوال ۴۴ شکل ۱۲)

(۱۳) ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ مثلث س ن س کے اندرونی دائرہ کے مرکز کا طریق ایک ناقص ہے۔

[فرض کرو کہ مثلث س ن س کا اندرونی دائرہ ن س کو ع پر اور س س کو ہ پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مثلث س ن س کا اندرونی مرکز ہے چونکہ ن س + س ن = ۲ اور س س = ۲ اور ' اس لیے مثلث س ن س کا احاطہ = $\frac{1}{2}(1+z)$ علم مثلث کے مشہور ضابطوں

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(n-s)(n-b)(n-g)}$$


اور $r = \frac{\Delta}{s}$ سے حاصل ہوتا ہے کہ مثلث س ن س کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر $e = \frac{\text{مثلث س ن س کا رقبہ}}{s(1+z)}$

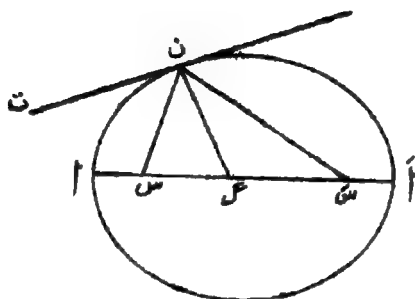
$$= \frac{\frac{1}{4} \sqrt{(n-s)(n-b)(n-g)}}{s(1+z)} = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{(n-s)(n-b)(n-g)}}{(1+z)}$$

اس لیے $e = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(n-s)(n-b)(n-g)}{(1+z)^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(n-s)(n-b)(n-g)}{(1+z)^2}}$ جو مستقل ہے۔

اس لیے اے کا طریق ایک ناقص ہے جس کے راس میں اور میں ہیں [

۷۴۔ مسئلہ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ن پر کے ماس اور عماد

زاویہ میں میں کے بالترتیب خارجی اور داخلی ناصف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد میں میں سے گ پر ملتا ہے۔

دفعہ ۱۹ کی رُو سے

$$\text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن اور س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س گ}}{\text{س گ}}$$

اس لیے ن گ زاویہ میں میں کا ایک مُصَنَّف ہے۔

اب ہم یہ بتائیں گے کہ ن گ زاویہ میں میں کا داخلی مُصَنَّف ہے۔

چونکہ س گ = ز × س ن، اس لیے س گ کی بڑی سے بڑی

قیمت ز × س ن ہے

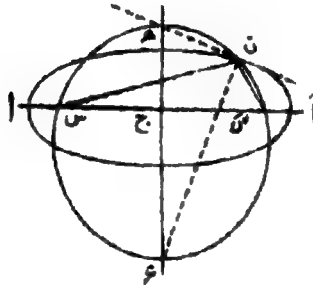
یعنی س گ > ز × س ن = س ن

اس لیے نقطہ گ میں اور میں کے درمیان واقع ہے۔

اس لیے ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد ن گ زاویہ م ن م کا داخلی مُقْبَع ہے۔

چونکہ ن پر کا عماس ن پر کے عماد پر علی القوام ہے اس لیے ن پر کا عماد ن ت زاویہ م ن م کا خارجی ناقص ہے۔

فرض - مثلث م ن م کے حاملہ دائرہ اور محور اصغر ب ج ب کے تقاطع کون سے طے والے خطوط ن پر کے عماس اور عماد ہیں۔



زمین کو کہ Δ م ن م کا حاملہ دائرہ ب ج ب کو Δ اور پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ ب ج ب عمودی ناقص ہے م ن م کا اس لیے م وسطی نقطہ ہے قوس م ع م کا۔

اس لیے ن ع اندرونی ناقص ہے زاویہ م ن م کا۔

اس لیے ن پر کا عماد ن ع ہے۔

نیز چونکہ زاویہ ع ن م قائمہ ہے اس لیے ن پر کا عماد ن ع ہے۔

امثلہ کا

(۱) مندرجہ بالا مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص کے راس ایسا پہلا م

ناقص کے محور اعظم پر عمود ہے۔

(۲) ناقص کے نقطہ ن پر کاٹس ماسکوں میں اور سن کے متناظر مرتبوں سے بالترتیب سے اترتے پر ملتا ہے اور سے اترتے سے سن ن پر عمود نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائیں کا درمیانی فاصلہ محور اعظم کے طول کے مساوی ہے۔

(۳) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے ٹاس پر ماسکوں میں اور سن سے عمود میں ما، من، مان نکالے گئے ہیں۔ اور ن ع محور ا پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ حاص ما کا نصف ع ن ہے۔

(۴) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے ۲ اس پر ماسکوں سے عمود میں ما نکالایا ہے۔ سن ما اور سن ن ایک دوسرے کو ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ سن ما} = \text{ما ق}$$

$$(۲) \text{ سن ن} = \text{ق ن}$$

$$\text{اور } (۳) \text{ سن ق} = \text{ا ا}$$

نوٹ - نتیجہ (۱) سے ظاہر ہے کہ ن پر کے ٹاس میں ماسکوں کا خیال ق ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی ماس میں ایک ماسکوں کے خیال کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دوسرا ماسکوں میں ہے، اور نصف قطر محور اعظم کے مساوی ہے۔

(۶) ناقص کا ایک ماسکوں ناقص پر کا ایک نقطہ، محور اعظم کا طول اور ایک ٹاس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

[اشارہ - چونکہ ناقص کا ایک ماسکوں ناقص پر کا ایک نقطہ اور محور اعظم کے طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکوں کا طریق ایک دائرہ ہو گا۔ نیز چونکہ ناقص کا ایک ماسکوں ایک ٹاس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکوں کا طریق ایک دائرہ ہو گا (دیکھو سوال ۲ نتیجہ ۲)۔ ان دو دائروں کے تقاطع سے دوسرا ماسکوں حاصل ہو گا۔]

(۷) ناقص کا ایک ماسکوں دو ٹاس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں، ناقص کو مرتسم کرو۔

ج ما کو لاؤ

تب مثلثات ن ماس اور ن ماق میں

$$\angle \text{سن ماس} = \angle \text{ق ن ماس}$$

کیونکہ ن پر کا ماس ن مازاویہ سن ن ماس کا خارجی ناصف ہے۔

$$\angle \text{ن ماس} = \angle \text{ن ماق} \quad (\text{کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے})$$

اور ن ماس دونوں مثلثات میں مشترک ہے

اس لیے مثلثات ن ماس اور ن ماق آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

$$\text{اس لیے سن ماس} = \text{ق ماس اور سن ماس} = \text{ق ن ماس}$$

$$\text{پس سن ماس} = \text{سن ماس} + \text{ن ماس} = \text{سن ماس} + \text{سن ماس} = 2 \text{ ج ماس}$$

چونکہ مثلثات سن ماس میں سن ماس کا وسطی نقطہ ج ہے اور سن ماس کا

وسطی نقطہ ماس ہے

$$\text{اس لیے ج ماس} = \frac{1}{2} \text{ سن ماس} = \text{ج ماس}$$

اس لیے ماس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر ج ماس ہے

یعنی ماس امدادی دائرہ پر واقع ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ماس بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے۔

اب ماس کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ سے مکرر ماس پر ملے۔

چونکہ ماس ماس امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے $\angle \text{ماس ماس ماس}$ قائمہ ہےلیکن بموجب عمل $\angle \text{ماس ماس ماس}$ بھی قائمہ ہے

اس لیے ماس ماس ایک خط مستقیم ہے

اب مثلثات ج ماس اور ج ماس میں

$$\text{ج ماس} = \text{ج ماس}$$

$$\text{ج ماس} = \text{ج ماس}$$

$$\text{اور } \angle \text{سن ج ماس} = \angle \text{سن ج ماس}$$

اس لیے مثلثات ج ماس اور ج ماس آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

$$\text{اس لیے سن ماس} = \text{سن ماس}$$

پس $س\ م\ ا \times م\ ن\ م\ ا = س\ م\ ا \times م\ م\ ا$

$= ۱\ س\ م\ ا \times م\ ا = ج\ با$

(موجب دفعہ ۴۲ - نوٹ ۲)

فرض (۱) - اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے
ماس کے متوازی ہو اور ن میں محدود بشرط ضرورت سے بالترتیب

ع، غ پر لے تو $ن\ ع = ن\ غ = ج\ ا$

چونکہ ج م ا // غ ن اور ن م ا // ع ج

اس لیے ن م ا ج ع متوازی الاضلاع ہے

یعنی $ن\ ع = ج\ م\ ا = ج\ ا$

اسی طرح $ن\ ع = ج\ ا$

فرض (۲) - اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا
پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے اندر س واقع ہے تو متغیر خط کا
لغاف ایک ناقص ہوگا جس کا ایک اسکہ س ہے۔

فرض (۳) - اگر ایک متغیر خط پر خط کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطہ
سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو متغیر خط کا لغاف ایک ناقص
ہوگا جس کے اسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

۱۸۔ مثلہ

(۱) مسئلہ بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ $س\ ع = س\ غ$
نیز ثابت کرو کہ مثلثات ج م ع اور ج س ع کے حائط دائرے
ساوی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر مرکز ج سے عمود
نکالا گیا ہے اور یہ عمود س ن محدود سے س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
س کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر ج ا کے

مساوی ہے - (۳) ناقص کا ایک ماسکہ، محمداً اعظم کا طول اور ناقص کے دو ماس دیئے گئے ہیں، ناقص کو مرتسم کرو۔

[اشارہ] - اگر دیے ہوئے ماسکہ میں سے ایک دیے ہوئے ماس پر عمود میں ما ہو تو ما ج = ج ۱ جن کا طول دیا گیا ہے۔ اس لیے ج ایک دائرو پر واقع ہے جس کا مرکز ما ہے اور نصف قطر ج کے مساوی ہے، اسی طرح سے دوسرے ماس کی مدد سے چل ہوتا ہے کہ مرکز ایک اور دائرہ ہے، ان دائروں کے تقاطع سے ناقص کا مرکز ج معلوم ہوتا ہے]۔

(۴) ناقص کا ایک ماسکہ، ایک ماس اور خروج مرکز معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[اشارہ] - وہ بالائی ترقیم کے مطابق ج س = ز × ج ۱

= ز × ج ما یعنی $\frac{ج س}{ج ما} = ز$ جو دیا گیا ہے، اس لیے ج کا طریق

ایک دائرہ ہے، اور چونکہ س س = ۲ ج س، اس لیے س کا طریق بھی ایک دائرہ ہے]۔

(۵) وہ بالائی شکل میں ثابت کرو کہ چار ضلعی میں ماس ماس کا احاطہ

اعظم ہوگا جبکہ \angle ما ج قائم ہو۔

[حاصل] - چونکہ س س مستقل ہے اس لیے س ما ماس کا

احاطہ اعظم ہوگا جبکہ س ما + ما ماس اعظم ہو۔ یعنی جبکہ

س ما + ما ماس اعظم ہو یعنی جبکہ قائم الزاویہ مثلث

ما ماس کے ضلعوں ما ماس اور ما ماس کا مجموعہ اعظم ہو۔ اب چونکہ

قائم الزاویہ مثلث ما ماس کا وتر ما ماس مستقل ہے اس لیے ما ماس + ما ماس

اعظم ہوگا جبکہ مثلث یکور متساوی الساقین ہو۔ اس صورت میں ج ما عمود ہوگا وتر ما ماس پر یعنی \angle ما ج قائم ہوگا]۔

(۶) ناقص کا کوئی ماس امدادی دائرہ سے ما اور ما پر مشابہ

(دیکھو شکل مسئلہ ۱۱) ثابت کرو کہ \angle ماما اور \angle ماما دونوں قائمے ہیں۔

(۷) اگر ایک زاویہ قائمہ کا رأس ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے اندر کے ایک ثابت نقطے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت ناقص کو مس کرے گی (دیکھو فرع (۱۲)۔

(۸) ناقص کا محور اعظم AA' اور ناقص کا ایک ماس معلوم ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

(۹) ناقص پر کا کوئی نقطہ N ہے ثابت کرو کہ N کے قطر پر کھینچا ہوا دائرہ امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[اشارہ]۔ اگر N پر کے ماس پر S سے عمود SN مابہ توجہ ما تنصیف کرتا ہے N کی

(۱۰) ناقص کا ماسکے ایک ماس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۱۱) ناقص کے دونوں ماسکے اور ایک ماس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

(۱۲) ایک بیرونی نقطہ سے ناقص کے مماسات کا جوڑا کھینچنے کے لیے سندرجہ ذیل عمل کا ثبوت بہم پہنچاؤ۔

قرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ T ہے۔ T سے N کے قطر پر دائرہ کھینچو جو امدادی دائرہ سے MA پر ملے۔ تب T مامدت مامحورہ ناقص کے مطلوبہ مماسات ہوں گے۔

(۱۳) ناقص پر کا کوئی نقطہ N ہے۔ مرکز J میں سے خطوط MA ، JA ، MA ، JA اور MA کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور N پر کے ماس سے MA اور MA پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $MA = JA = JA$ ۔

(۱۴) ناقص کے مماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں۔

[اشارہ :-] ماسکوں سے دیے ہوئے خط پر عمود محالو فرض کرو کہ یہ عمود امدادی دائرہ سے محور اعظم کی ایک ہی جانب نقطوں ما اور ما پر ملتے ہیں۔ تب ما ما ناقص کا ایک ماس ہوگا جو دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔ اسی طرح بے عمودوں اور امدادی دائرہ کے ان نقاط تقاطع کی مدد سے جو محور اعظم کی دوسری جانب ہیں دوسرا ماس بھی کھینچ سکتا ہے۔]

(۱۵) دوسرا ماس ناقصوں کے مرکز مشترک ہیں۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات کھینچو۔

[اشارہ :-] چونکہ ناقص مساوی ہیں اور مرکز منطبق ہیں اس لیے دونوں ناقصوں کا ایک ہی امدادی دائرہ ہے۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات دیے ہوئے ناقصوں کے ماسکوں میں سے دو دو کو ملانے والے چار خطوط اور امدادی دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔]

(۱۶) ناقص کا ایک ماسک ایک ماس اور محور اصغر کا طول معلوم ہیں۔ دوسرے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۱۷) ایک ثابت نقطہ میں پر ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کے ایک متغیر وتر ن کے محاذی ہمیشہ زاویہ قائمہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ایک ایسے ناقص کو لف کرتا ہے جس کے ماسکے میں اور ج ہیں۔

(۱۸) ناقص کا ایک ماس امدادی دائرہ سے ما، ما پر ملتا ہے اور ایک اور ماس ما ما کو و پر عمود وار قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ و ما و ما = ج ب

[اشارہ :-] مں ما اور مں ما دونوں ما ما پر عمود وار ہیں۔

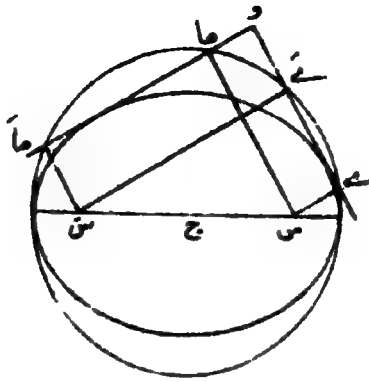
اگر و میں سے گزرنے والا دوسرا ماس امدادی دائرہ سے مے، مے پر اور مں مں سے گزرنے والا دوسرا ماس امدادی دائرہ سے مے، مے پر عمود وار ہونگے۔

تب و ما × و ما = مں مں × مں مں = ج ب

(۱۹) سوال بالا (۱۸) میں ثابت کرو کہ ج ڈ = ج آ + ج ب

[اشارہ :-] و ما × و ما = ج ب

یعنی ج ب = مں مں کا مربع جو و سے امدادی دائرہ تک کھینچا جائے۔

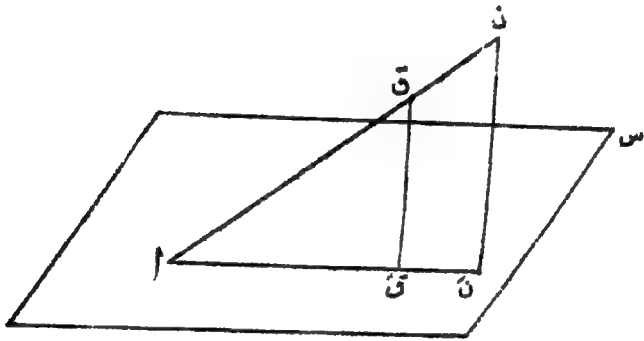


یعنی ج با = ج د - ج ا یعنی ج د = ج ا + ج ب
 نوٹ - اس سوال سے ظاہر ہے کہ ناقص کے دو علی القوام حاسوں کے
 نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا
 مربع نیم محور اعظم اور نیم محور اصغر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس
 دائرہ کو ناقص کا محربہ دائرہ کہتے ہیں۔
 ۴۹ - ناقص کے متعلق بعض مسائل ایسے ہیں جو قائم تطلیل کی
 مدد سے بہ آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔ اس لیے اب ہم قائم تطلیل کے
 متعلق چند اساسی مسئلے ثابت کرینگے اور بعد ازاں ان مسئلوں کی مدد
 سے ناقص کے مزید خواص حاصل کرینگے۔

۵۰ - تعریفات -

(۱) اگر کسی نقطہ ن سے ایک ثابت سطح مستوی میں پر عمود
 ن ن نکالا جائے تو عمود کے پائین ن کو نقطہ ن کا قائم ظل کہتے ہیں اور سطح میں
 کو سطح تطلیل کہتے ہیں۔

(۲) اگر نقطہ ن ایک خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کرے تو ایک وی ہوئی
مستوی سطح سے پر ن کا ظل ایک اور خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کرے گا جس کو
دیے ہوئے خط کا قائم ظل کہتے ہیں۔
(۳) اگر دی ہوئی شکل ایک مستوی سطح میں واقع ہو تو اس سطح اور سطح تظلیل کے
خط تقاطع کو محور تظلیل کہتے ہیں۔
۵۱۔ قائم تظلیل کے مشہور خواص حسب ذیل ہیں :-
(۱) خط مستقیم کا ظل خط مستقیم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ دیا ہوا خط مستقیم ن ا سطح تظلیل سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔
ن سے سطح میں پر عمود ن ن نکالو۔ تب مستوی سطح ا ن سطح تظلیل
میں پر عمود وار ہوگی۔ خط مستقیم ن ا کے کسی اور نقطہ ق سے سطح میں پر
عمود ق ق نکالو۔ تب ن ن اور ق ق ہم سطح ہونگے۔ اس لیے
عمود ق ق مستوی سطح ن ا میں واقع ہوگا۔ اس لیے نقطہ ق کا
قائم ظل ق سطوں میں اور ن ا کے خط تقاطع پر یعنی خط مستقیم
ان پر واقع ہوگا۔
فرض (۱) دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کا ظل ان خطوط کے

ن قی سہا کاٹتے ہیں۔ اس لیے حتموں ن ق قی سہا کو آپس میں دہی نسبت ہے جو ان حتموں کے ظلوں ن ق قی سہا کو آپس میں ہے۔
نوٹ (۱) کسی خط اور اس خط کے ظل کے درمیانی زاویہ کو خط اور سطح تنظیم کا درمیانی زاویہ کہتے ہیں۔

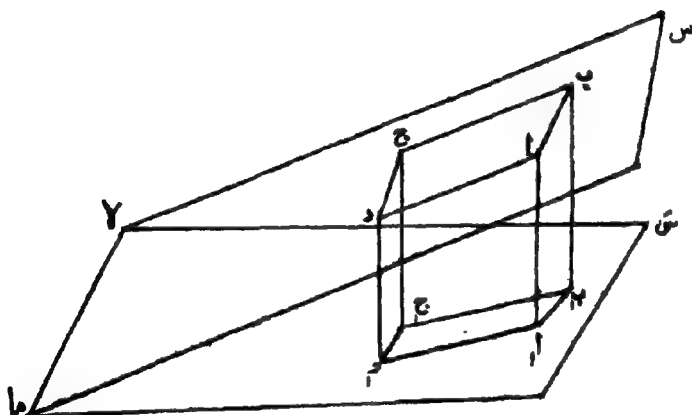
فرض کرو کہ محدود خط اب کا ظل آب ہے۔ نیز فرض کرو کہ اب اور آب کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ تب آب = اب x جم ط
اس نتیجہ کی مدد سے بھی مندرجہ بالا مسئلہ (ج) حاصل ہو سکتا ہے۔
نوٹ (۲) اگر ایک خط سطح تنظیم کے متوازی ہو تو اس کے ظل کا طول خط کے طول کے مساوی ہوگا۔

(د) متوازی خطوط کے طولوں کو آپس میں دہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ظلوں کے طولوں کو آپس میں ہے۔
فرض کرو کہ اب اور ج د باہم متوازی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان کے ظل آب اور ج د ہیں۔ اگر اب اور آب کا درمیانی زاویہ ط ہو تو ج د اور ج د کا درمیانی زاویہ بھی ط ہوگا۔

اس لیے آب = اب جم ط اور ج د = ج د جم ط
اس لیے آب : ج د = اب : ج د جو ثابت کرنا تھا۔
(ه) کسی منحنی کے ماس کا ظل منحنی کے ظل کا ماس ہوتا ہے۔

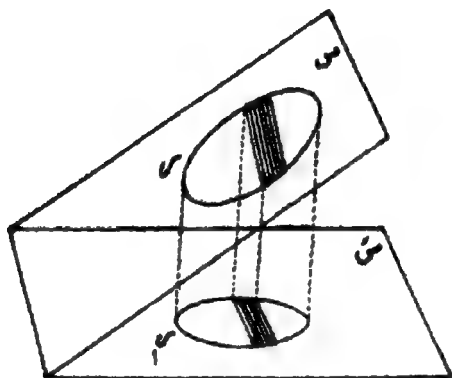
فرض کرو کہ ایک منحنی پر دو قریب کے نقطے ن اور ق ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ن اور ق کے ظل بالترتیب ن اور ق ہیں۔ چونکہ ن ق کا طول ن ق کے طول سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ اس لیے جوں جوں نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے حد قریب آتا ہے نقطہ قی منحنی کے ظل پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے حد قریب آتا ہے اور انتہا میں جب نقطہ ق نقطہ ن پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ قی نقطہ ن پر منطبق ہو جاتا ہے۔ اس لیے منحنی کے نقطہ ن کے ماس کا ظل منحنی کے ظل کے نقطہ ن پر کا ماس ہے۔ نیز منحنی پر بھی ثابت ہوا ہے کہ منحنی اور اس کے کسی ماس کے نقطہ ماس کا ظل

منحنی کے ظل اور تماس کے ظل کا نقطہ تماس ہوتا ہے۔
 (د) اگر ایک مستوی سطح میں پر ایک رقبہ $س$ ہو اور اس کا ظل
 ایک اور مستوی سطح میں پر نکالا جائے تو ظل کا رقبہ $تر = س \times \text{جھم ط}$
 جہاں سطحوں میں اور $تر$ کا درمیانی زاویہ ط ہے۔
 صیغہ صحت اولیٰ - فرض کرو کہ دیا ہو ا رقبہ ایک مستطیل اب ج د
 ہے جس کا ایک ضلع اب محور تقطیل کے متوازی ہے اور دوسرا ضلع ب ج
 لازماً محور تقطیل پر عمود وار ہے۔



فرض کرو کہ اب ج د کا ظل اب ج د ہے۔
 تب اب ج د محور تقطیل کے متوازی ہوگا اور اب ج د محور تقطیل پر عمود وار ہوگا۔
 اس لیے ظل اب ج د بھی ایک مستطیل ہے۔
 نیز اب ج د = اب ج د جھم ط = ب ج جھم ط کیونکہ ب ج اور اب ج کا
 درمیانی زاویہ ط ہے۔
 اس لیے ظل اب ج د کا رقبہ تر = اب ج جھم ط = ب ج جھم ط

صورت دوم۔ فرض کرو کہ سطح میں پر کوئی رقبہ سر دیا گیا ہے جس کا طول سطح تظیل میں پر تھا ہے۔
فرض کرو کہ سطحوں میں ادرس کا درمیانی زاویہ ط ہے۔

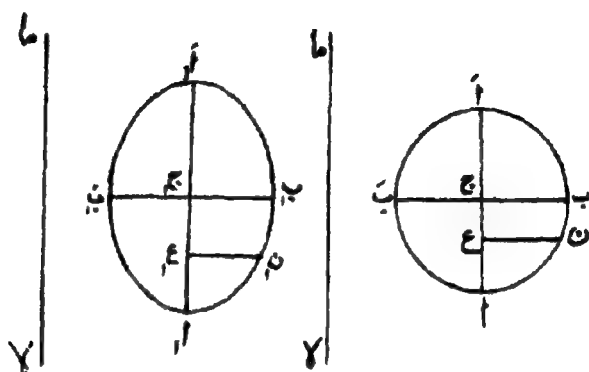


رقبہ سر کو محور تظیل کے متوازی خطوط کے ذریعے ایسی بے شمار پٹیوں میں تقسیم کر دیں جس سے ہر ایک کی چوڑائی بہت چھوٹی ہو۔ چونکہ ہر پٹی کی چوڑائی بہت چھوٹی ہے اس لیے ہر ایک پٹی کو مستطیل مانا جا سکتا ہے۔ ان پٹیوں میں سے کسی ایک پٹی کے طول کا طول اس پٹی کے طول کے مساوی ہوگا اور
 $\text{طول کا عرض} = \text{اس پٹی کا عرض} \times \text{جم ط}$

اس لیے کسی پٹی کے طول کا رقبہ = پٹی کا رقبہ \times جم ط
 اس لیے طول کی تمام پٹیوں کا مجموعی رقبہ = سطح میں ہر ایک پٹیوں کے رقبہ کا مجموعہ \times جم ط یعنی طول کا رقبہ سر = دیا ہوا رقبہ سر \times جم ط۔

۵۲۔ مسئلہ۔ دائرہ کا قائم طول ناقص ہوتا ہے۔
 فرض کرو کہ سطح میں پر کے دائرہ (ج) کا طول سطح تظیل میں پر نکالا گیا ہے
 دائرہ کے قطر ا ج ا ا د ب ج ب کہیں جو بالترتیب محور تظیل کے متوازی

اس پر عمود وار ہوں۔ فرض کرو کہ ج، ا، ب کے کل بالترتیب ج، ا، ب، ب، ب، ب ہیں۔ [وضاحت کی خاطر اصل شکل اور اس کا نقل بل میں علیحدہ علیحدہ دکھائے گئے ہیں]۔



چونکہ اج ۱۰ سطح تفصیل کے متوازی ہے

اس لیے $1ع = 1ع$ اور $2ع = 2ع$

نیز ب ج ب عمودوار ہے ا ج ا پر

دائرہ (ج) کے کسی نقطہ سے قطر اجا پر عمودوں کا
 فرض کرو کہ ن ع کا ظل ن ع ہے۔ تب ن ع عمود وار ہوگا

چونکہ ن ع اور ب ج متوازی ہیں

اس لیے $\frac{ن_۱ ع_۱}{ن_۲ ع_۲} = \frac{ب_۱ ج_۱}{ب_۲ ج_۲}$

یعنی $\frac{N_1}{N_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{B_1}{B_1} = 1$

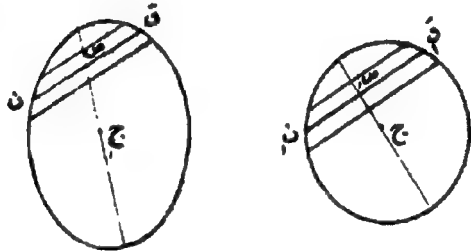
نیز $2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$

اس لیے $\frac{ن ا ج}{ا ج \times ا ج} = \frac{ب ا ج}{ا ج}$ جو ایک متقل مقدار ہے۔

پس دفعہ ۲ کی رو سے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا محورِ اعظم ا ا ہے اور جس کے نصف محورِ اعظم اور نصف محورِ اصغر ج ب اور ج ا ہیں۔
نوٹ - دائرہ کے ہر قطار کی تنصیف مرکز ج پر ہوتی ہے اس لیے
دائرہ کے ظل یعنی ناقص میں نقطہ ج کے ظل ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی
نصیف ج پر ہوتی ہے اس لحاظ سے نقطہ ج کو ناقص کا مرکز کہتے ہیں۔ یعنی
دائرہ کے مرکز کا ظل ناقص کا مرکز ہے۔

۵۳۔ مسئلہ۔ اگر ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو

ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خطِ مستقیم ہوگا جو ناقص کے
مرکز میں سے گزرتا ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ (ج) کا ظل ایک ناقص ہے جس کا مرکز ج ہے۔
ناقص کے متوازی وتروں کا نظام دائرہ (ج) کے متوازی وتروں کے ایک
نظام کا ظل ہے اور ناقص کے ان وتروں کے وسطی نقاط دائرہ کے متناظر
وتروں کے وسطی نقطوں کے ظل ہیں۔ دائرہ کی صورت میں متوازی وتروں کے

وسطی نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور چونکہ خط مستقیم کا ظل خط مستقیم ہوتا ہے اس لیے ناقص کی صورت میں بھی متوازی دوائر کے وسطی نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
تعریف - ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم و ناقص کا قطر کہتے ہیں کیونکہ یہ خط دائرہ کے کسی نہ کسی قطر کا ظل ہے۔

شرح - اگر ناقص کے متوازی دوائر کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر ناقص سے نقاط $ع$ ، $ع'$ پر ملے تو $ع$ دائرہ $ع$ پر کے ماسات $ان$ دوائر کے متوازی ہونگے۔

$ع$ میں سے ایک خط دیے ہوئے دوائر کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط ناقص سے کرر نقطہ $ھ$ پر ملتا ہے چونکہ ناقص کا وتر $عھ$ دیے ہوئے دوائر کے متوازی ہے اس لیے ضروری ہے کہ $عھ$ کا وسطی نقطہ قطر $ع$ پر واقع ہو اور یہ صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ نقطہ $ھ$ نقطہ $ع$ پر منطبق ہو۔ اس لیے وہ خط جو $ع$ میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے نظام کے دوائر کے متوازی ہے نقطہ $ع$ پر ناقص کا ماس ہے۔ یعنی $ع$ پر ناقص کا ماس دیے ہوئے دوائر کے متوازی ہے۔

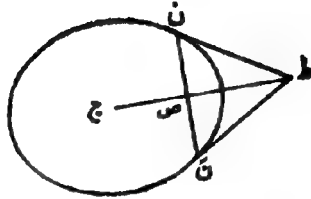
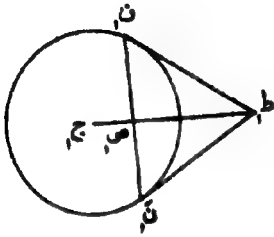
اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $ع'$ پر کا ماس بھی دیے ہوئے دوائر کے متوازی ہے۔

۴۷ - مسئلہ - ناقص کے کسی وتر کے سروں پر کے ماسات

کا نقطہ تقاطع اُس قطر پر واقع ہوتا ہے جو وتر مذکور کی تنصیف کرتا ہے۔
 دائرہ (ج) میں کسی وتر $ن$ کے سروں پر کے ماسوں کا خط تقاطع $ط$ ہے۔ اگر ج $ط$ اور $ن$ کا نقطہ تقاطع $ص$ ہو تو $ن$ کا وسطی نقطہ $ص$ ہوگا۔

اب اس شکل کا قائم ظل $و$ ۔ دائرہ کا ظل ایک ناقص ہوگا جس کا مرکز ج دائرہ کے مرکز ج کا ظل ہوگا۔ دائرہ کے وتر $ن$ کا ظل ناقص کا

وترن ن ہوگا اور ن اور ن پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ط دائرہ کے

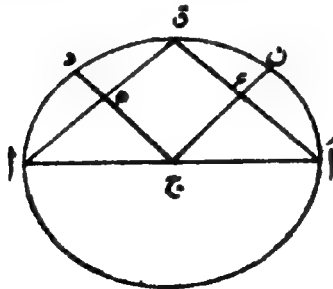


نقطہ ن ن پر ماسات کے نقطہ تقاطع ط کا قتل ہوگا اور ج ط کا قتل ج ط ہوگا۔
نیز ج ط اور ن ن کا نقطہ تقاطع ص نقطہ ص کا قتل ہوگا۔

چونکہ ایک خط مستقیم کے حصوں کی نسبت تقطیل سے نہیں بدلتی اس لیے
ن ن کے وسطی نقطہ ص کا قتل یعنی نقطہ ص ناقص کے وترن ن کا وسطی نقطہ ہوگا۔
پس ثابت ہوا کہ ناقص کے وترن ن کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع
ط ناقص کے اس قطر پر ہے جو وترن ن کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں

کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔



فرض کرو کہ ناقص کا ایک قطر جن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی
کرتا ہے۔

ناقص کے محور اعظم AA' کے سرے A میں سے ج د کے متوازی
ای AA' کیسے ہو۔ ای AA' کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ ای AA' اور جن کا نقطہ تقاطع E ہے اور ای AA' اور ج د کا
ملع H ہے۔

مسب مفروض ای AA' کا وسطی نقطہ E ہوگا۔

ثالث ای AA' میں ای AA' کا وسطی نقطہ E ہے اور AA' کا وسطی نقطہ
۔ اس لیے ای AA' ج E کے متوازی ہے۔ یہیں ثابت کرنا ہے کہ
ای AA' کا وسطی نقطہ H ہے۔

چونکہ ج H ثالث ای AA' کے ضلع AA' کے وسطی نقطہ ج میں سے
ہے اور ضلع ای AA' کے متوازی ہے اس لیے ای AA' کا وسطی نقطہ H ہے
ای AA' کے متوازی وتروں کی تنصیف ج H کرتا ہے یعنی قطر جن
ی وتروں کی تنصیف قطر ج H کرتا ہے۔

تعریف۔ اگر ناقص کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں
دوسرے قطر کے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف
ہے) تو ان قطروں کو جن دو ج قطر کہتے ہیں۔

نوٹ۔ ناقص کا محور اعظم اور محور اصغر مزدوج قطروں کی خاص صورت

۵۶۔ تعریف۔ اگر ناقص کے کسی قطر جن کے سرے

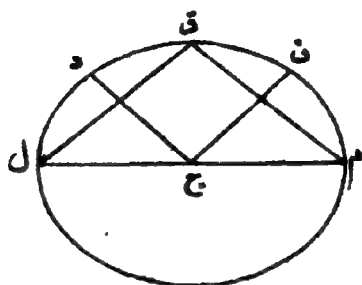
کو ناقص کے کسی نقطہ Q سے ملا جائے تو وتر جن Q اور جن Q

لی وتر کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ناقص کے کسی قطر جن کے متوازی قطر جن کو قطر جن کہتے ہیں۔

ناقص کے کسی نقطہ Q کو کسی قطر جن AM کے سرے A سے
جن Q لی Q م تکمیلی وتر ہونگے۔

حکاج میں سے جن، جود بالترتیب لقی، مق کے متوازی کہیں۔



ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ج ن ' ج د ' مقص کے فروج قطر ہیں۔ چونکہ
شعری ل م کے ضلع ل م کے وسطی نقطہ ج میں سے ج ن ' ل ق کے
زوی کھینچا گیا ہے اس لیے ج ن ' ق م کی تضعیف کرتا ہے۔
اس لیے ج ن اُن سب وتروں کی تضعیف کرتا ہے جو ق م کے متوازی
ہیں۔ یعنی قطر ج ن اُن سب وتروں کی تضعیف کرتا ہے جو قطر ج د کے
متوازی ہیں۔

اس لیے طرح د اُن سب و تروں کی تضعیف کرتا ہے جو طرح ن متوازی ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ حج ن حج د مزوج قطر ہیں۔

امشب ۱۹

نہایت کہ اس تعلیم کے سبب غریب و حقیر کی تعلیم

میں نے اپنے دل کے لیے اس کا حصہ لے لیا ہے اور

اشارہ۔ معلوم ہے کہ د اور د پر کے حاسات کا نقطہ تقاطع ط محور عظم
محدودہ پر واقع ہے۔ نیز د پر کا ماس دط متوازی ہے جن کے۔ اس لیے مثلثات

$$\text{ط م د اور ج ل ن متشابہ ہیں۔ اس لیے } \frac{\text{ط م}}{\text{ج ل}} = \frac{\text{د م}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{د م}}{\text{ل ن}}$$

اس لیے مثلثات ط م د اور ج ل ن متشابہ ہیں یعنی دط متوازی ہے
ن ج کے یعنی ن ج قائمہ ہے۔

(۱۸) سوال بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ ج ن + ج د = ج ا + ج ب
فرض کرو کہ زاویہ ل ج ن = ط

$$\text{تب ج ل} = \text{ج ن جم ط} = \text{ج ا جم ط}$$

$$\text{ل ن} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}} \times \text{ل ن} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}} \times \text{ج ن جم ط} = \text{ج ب جب ط}$$

اسی طرح ج م = ج ا جب ط اور م د = ج ب جم ط

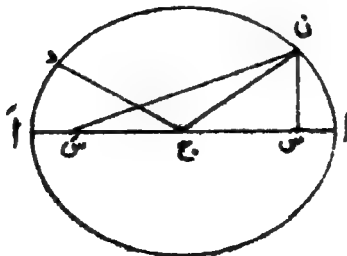
$$\text{اس لیے ج ن} + \text{ج د} = (\text{ج ل} + \text{ل ن}) + (\text{ج م} + \text{م د})$$

$$= \text{ج ا جم ط} + \text{ج ب جب ط} + \text{ج ا جب ط} + \text{ج ب با جم ط}$$

$$= \text{ج ا} + \text{ج ب}$$

(۱۹) ن ج ن د ماقص کے مزدوج نیم قطر میں ثابت کرو کہ ن س × ن س

$$= \text{ج د}$$



اشارہ۔ سن + سن = ۲

اس لیے سن + سن = ۲ سن × سن = ۲

لیکن سن + سن = ۲ ج + ۲ ج = ۲

۲ ج + ۲ ج = ۲

اس لیے ۲ سن × سن = ۲ - (۲ ج + ۲ ج = ۲)

اس لیے سن × سن = (۱ + ۱ - ج - ج)

= ج - ج - ج - ج

= ج - ج

امثلہ ۲

(ناقص پر متفرق مثالیں)

(۱) ناقص کے مرکز کو مرکز مان کر دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں

پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ متبادل نقطوں کو ملانے والے خطوط مرکز میں سے گزرتے ہیں اور محور کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۲) کاغذ پر ایک ناقص کھینچا ہوا ہے اس کے ضروری اجزاء معلوم کرو۔

[اشارہ۔ کوئی دو متوازی وتر کھینچو۔ ان کے وسطی نقطوں میں سے

گزرنے والا خط قطر ہوگا جس کا وسطی نقطہ مرکز ہوگا۔ اب ایک ہم مرکز دائرہ کھینچ کر

سوال (۱) کی مدد سے محو معلوم کرو۔ اب دیگر اجزاء آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں]

(۳) اگر ناقص کے دو وتر ایک دوسرے کی نصفیت کریں تو ثابت کرو کہ

نقطہ تقاطع ناقص کا مرکز ہوگا۔

(۴) ناقص کے کسی نقطہ پر کا ماس ایک قطر کے سروں پر کے ماس

سے لا امد حا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج لا ج ما ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

(۵) اعدادی دائروں کی مدد سے ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ سے

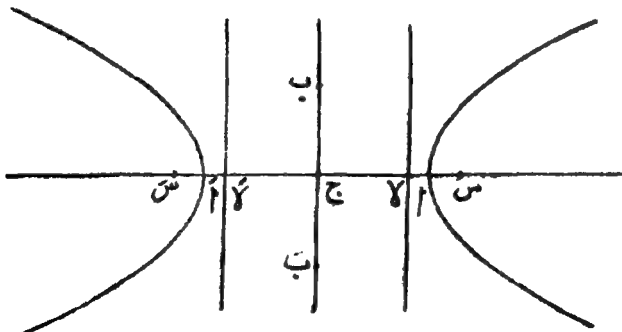
ناقص کے ماس کھینچو۔

(۶) ج ن ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ ن پر کا عماد محور اعظم سے
 گ پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ \times ن ف = ج ب [اقتضایہ]۔
 فرض کرو کہ ن کا سین ن ع عمودہ ج د سے ہ پر ملتا ہے۔
 نیز فرض کرو کہ ن سے محور اصغر پر عمود ن ح ہے اور ن پر کا ماس محور اصغر
 عمودہ سے ت پر ملتا ہے۔ چونکہ گ ف \times ہ \times مشترک محیط میں اس لیے
 ن گ \times ن ف = ن ع \times ن ہ = ج ع \times ج ت = ج ب [ج د سے
 (۷) ج ن ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں، ن پر کا عماد محور اصغر
 گ پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ \times ن ف = ج ا [ج د سے
 (۸) اگر ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں میں سے گزرنے والے قطر
 مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ ماسکی وتر کا طول نیم محور اعظم کے مساوی ہوگا۔
 [اشارہ]۔ فرض کرو کہ ماسکی وتر ن م د ہے۔ حسب مفروض ج ن ج د
 مزدوج قطر ہیں، ج میں سے د ن کے متوازی ایک خط کھینچو جو ن پر کے ماس
 ک پر ملے۔ تب ن د = ج ک = ج ا [ج د سے
 (۹) دو ناقصوں کا امدادی دائرہ ایک ہی ہے۔ اگر ان میں ایک ناقص
 دوسرے کے ماسکوں میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسرا ناقص پہلے کے ماسکوں
 میں سے گزرے گا۔
 (۱۰) ناقص کے مرکز ج سے نقطہ ن پر کے ماس پر عمود ن ما
 نکالا گیا ہے اور ما سے ناقص کا دوسرا ماس ماق ہے۔ ثابت کرو کہ
 ن پر کا عماد ق میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سروں میں سے
 گزرتا ہے۔

چوتھا باب

زائد

۵۷ - دفعہ (۱۱) کی تعریف کے بموجب زائد ایک مخروطی ہے جس کا خروج المرکز ز بڑا ہے اے۔ پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علیحدہ علیحدہ شاخیں ہیں اور جس کے دو تشاکل کے محمد ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز ج پر عمود وار قطع کرتے ہیں اور جن میں



ایک محمد ۲۲ مرتب پر عمود وار ہے اور دوسرا محمد ب مرتب کے متوازی ہے۔

نیز محور ۱ پر دو ماسکے میں اور من واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب میں جو ۱ پر عمود وار ہیں اور ۱ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب نقاط لا اور لا پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج : س = ۱ : ج = ۱ : ج = لا = ز ماسکوں میں سے گزرنے والا محور زائد سے دو حقیقی نقطوں ۱ اور ۲ ہے جو زائد کے رأس کہلاتے ہیں۔ اس محور کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ اور دوسرے محور تشاکل ب ب کو جو زائد کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا مزدوج محور کہتے ہیں۔ ۵۸۔ اگر مزدوج محور ب ج ب پر نقاط ب، ب اس طرح لیے جائیں کہ ب ج = ج ب اور ج ب = ج ب = ج ا - ج س تو نقاط ب اور ب مزدوج محور کے سرے کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ج ب = ا س × ا س = ج س × لا س

کیونکہ ج ب = ج س - ج ا = (ج س + ج ا) (ج س - ج ا)

$$= ا س \times ا س$$

نیز ج ب = ج س - ج ا = ج س - ج س × ج لا

$$= ج س [ج س - ج لا] = ج س \times لا س$$

ترقیم۔ نیم قاطع محور ج ا کے طول کو بالعموم ۱ سے اور نیم مزدوج محور ج ب کے طول کو بالعموم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ:۔ (۱) چونکہ ج س = ز × ج ا

اس لیے رشتہ ج ب = ج س - ج ا ہو جاتا ہے

$$ج ب = ج ا (ز - ۱)$$

یعنی اوپر کی ترقیم کے مطابق ب = ا (ز - ۱)

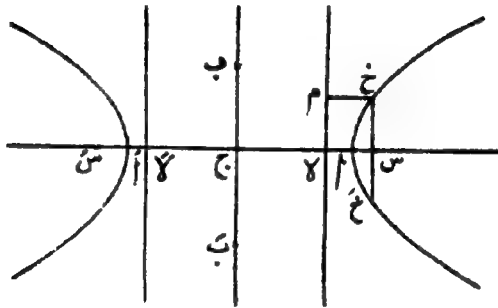
اس رشتہ کی مدد سے اگر معادیر ۱ ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں

تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

نوٹ:- (۱۲) اس دفعہ کا مقابلہ ناقص کے مائل خواص مندرجہ دفعہ ۴۴ کے ساتھ کرو۔

۵۹۔ مسئلہ۔ زائد کا نیم وتر خاص، نیم قاطع عمود اور نیم مزدوج محور کا

$$\text{قیسرتناسب ہے یعنی } \frac{\text{ج ۱}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{س ج}}$$



وتر خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

$$\text{چونکہ خ زائد پر کا نقطہ ہے اس لئے } \frac{\text{س خ}}{\text{خ م}} = \text{ز} = \frac{\text{ج م}}{\text{ج ۱}}$$

$$\text{یعنی } \text{س خ} \times \text{ج ۱} = \text{ج م} \times \text{خ م}$$

$$= \text{ج م} \times \text{خ م}$$

$$= \text{ج ب}^2 \quad (\text{موجب دفعہ ۵۸})$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ج ۱}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{س خ}}$$

نوٹ۔ مسئلہ بالا میں منشا حاصل ہوا کہ نیم وتر خاص س خ = $\frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ۱}}$

اگر حسب معمول نیم وتر خاص کے طول کو ۱ سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ل} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$$

امثلہ ۲۱

(۱) زاہد کے کسی محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی خلاف جانب میں دو خط کھینچے گئے ہیں جو زاہد سے ملتے ہیں اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے طول مساوی ہیں۔ نیز اس مسئلہ کا عکس بیان کرو اور اسے بھی ثابت کرو۔

(۲) دو قعات h کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو کہ زاہد کلیتہً ان خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سر میں h میں سے گزرتے ہیں اور h پر عمود وار ہیں اور اس نتیجہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زاہد دو لائنوں پر مشتمل ہے۔

(۳) اگر ایک ناقص، ایک مکافی اور ایک زاہد میں ایک ماسک اور مرتب مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ مکافی کلیتہً ناقص کے باہر واقع ہوگا اور زاہد کی ایک شاخ کے اندر واقع ہوگا۔

(۴) دو ثابت نقطوں h اور b میں سے متعدد دائرے کھینچے گئے ہیں اور ان دائروں میں سے کسی ایک کی قوس پر نقطہ n ایسا ہے کہ قوس h ان قوس n کی نصف ہے۔ ثابت کرو کہ n کا طریق اس قطع زاہد کی ایک شاخ ہے جس کا ماسک h ہے اور مرتب b کا عمودی منصف ہے اور خروج المرکز 2 ہے۔

(۵) اگر ایک دائرہ قاطع محور کو ایک ماسک پر مس کرے اور مزدوج محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر مزدوج محور کا جو طول منقطع ہوتا ہے وہ $\frac{h}{b}$ کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث h کا ایک رأس h ثابت ہے اور دوسرے دو رأس b اور c ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر زاویہ h ہمیشہ ایک مستقل زاویہ e کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ مثلث h کا c کے

متشابه مثلثات اُن ع اور اک لا میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ک لا}{۱۷} = \frac{ع ن}{ع ا}$$

نیز متشابه مثلثات اُن ع اور اک لا میں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا ک}{۷۱} = \frac{ع ن}{ع ا}$$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے،

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ک لا \times لا ک}{۷۱ \times ۱۷} = \frac{ن ع}{ع ا \times ع ا}$$

نیز بموجب دفعہ ۱۱، س ک اور س ک زاویہ ن س ا کے خارجی اور داخلی مُنصف ہیں۔

اس لیے زاویہ ک س ک قائمہ ہے۔

$$(۴) \dots\dots\dots اس لیے ک لا \times لا ک = لا س$$

اس لیے رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$\frac{ن ع}{ع ا \times ع ا} = \frac{لا س}{۷۱ \times ۱۷}$$

لیکن $\frac{لا س}{۷۱ \times ۱۷}$ ایک مستقل مقدار ہے

اس لیے $\frac{ن ع}{ع ا \times ع ا}$ کی قیمت مستقل ہے ن کے تمام مقابوں

کے لیے۔ اب اُس صورت میں جبکہ ن وترِ خاص کے سرے خ پر منطبق ہو

$$\frac{ن ع}{ع ا \times ع ا} \text{ ہو جاتا ہے } \frac{س خ}{س ا \times س ا}$$

$$(بموجب دفعہ ۵۹) \frac{ج ب}{ج ا} = \frac{س خ}{س ا} =$$

$$\frac{\text{ج ب}^1}{\text{ج}^1} = \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ع}^1 \times \text{ا}^1}$$

$$\text{نوٹ (۱)۔ چونکہ } \text{ع}^1 \times \text{ا}^1 = (\text{ج}^1 - \text{ع}^1)(\text{ج}^1 + \text{ع}^1) \\ \text{ج}^1 - \text{ع}^1 =$$

اس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے۔

$$\frac{\text{ج ب}^1}{\text{ج}^1} = \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج}^1 - \text{ع}^1}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج ب}^1} = \frac{\text{ج}^1 - \text{ع}^1}{\text{ج}^1} = 1 - \frac{\text{ع}^1}{\text{ج}^1}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ج}^1}{\text{ج ب}^1} = \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج}^1 - \text{ع}^1} = 1$$

اب اگر ا ج ا اور ب ج ب کو حوالہ کے محدود مانا جائے اور نقطہ ن کے محدود (لا، ما) ہوں تو ج ع = لا (فصل) اور ع ن = ما (معیں)

$$\text{اور نتیجہ بالا ہو جاتا ہے } 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$$

چونکہ زائد پر کسی نقطہ ن کے محدود (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے

ہیں اس لیے یہ رشتہ یعنی $1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ زائد کی مساوات ہے۔

$$\text{نوٹ (۲)۔ اگر (لا، ما) زائد } 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} \text{ پر کا ایک نقطہ}$$

ہو تو نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) بھی زائد کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

اس لیے یہ نقطے بھی زائد پر ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ زائد حوالہ کے

دونوں محوروں ا ج ا اور ب ج ب کے لحاظ سے متشکل ہے۔ اس

طریقہ سے اس امر کا متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ زائد بلحاظ دو علی القوائم

محوروں کے متشکل ہے۔“

اس سے ظاہر ہے کہ مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف ج پر ہوتی ہے۔ اس لیے مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کو زائد کا قطر کہتے ہیں۔

نوٹ (۳) زائد کی مساوات $\frac{لا}{ب} = \frac{ب}{پ} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ

لا کی عددی قیمت ۱ سے چھوٹی نہیں ہو سکتی یعنی زائد کلیتہً اُن خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سروں 'ا' میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور پر عمود وار ہیں۔

نیز ظاہر حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے یعنی قاطع محور کے متوازی ہر خط زائد کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

مثلاً ۲۲

(۱) ایک محدود خط مستقیم ہے۔ اُ ا مدودہ پر کے کسی نقطہ ع پر عمود ع ن ہے۔ اگر $\frac{ع ن}{ع ا} = \frac{ع ا}{ع پ}$ متقل رہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے جس کا قاطع محور ا ا ہے۔

(۲) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ا ا مدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ا ا پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول دائرہ کے اس حاس کے طول کے مساوی ہے جو ع میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے نیز ثابت کرو کہ اس قطع زائد کا خروج المركز ا ا ہے۔

(۳) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ا ا مدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ا ا پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول اس حاس کے طول کے ساتھ جو ع میں دائرہ تک کھینچا گیا ہے ایک متقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے۔

(۴) ن ن دائرہ کا کوئی وتر ہے جو ایک ثابت قطر ا ا پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا ن اور ا ن کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے۔

(۵) ن ع ن ناقص کا ایک دوہرا متین ہے۔ ثابت کرو کہ

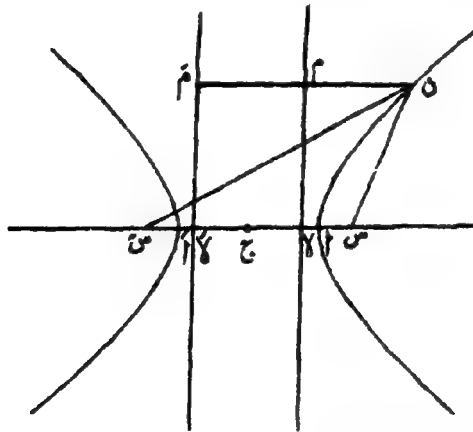
ان اور ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے۔

(۶) زائد پر کے کسی نقطہ ن سے قاطع محور عمودہ پر عمود ن ع نکالا گیا ہے اور ع سے ۱۱ قطر والے دائرہ کا ایک پاس ع ت بھیجی گیا ہے اگر زاویہ ع ج ت = ط تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے محدد (نقطہ ط) ب مس ط) ہیں۔

(۷) دفعہ ۶ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زائد متشکل ہے بلحاظ خط ب ج ب جوج میں سے گزرتا ہے اور ۱۱ پر عمود وار ہے۔

نیز ثابت کرو کہ زائد کا ایک اور پاسک اور اس کے جواب کا ایک اور مرتب ہے۔ (۸) ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر متعین ع ن نقاط ن، ۱، ۲، ۳ میں سے گزرنے والے دائرہ سے مکر نقطہ ک پڑے تو ثابت کرو کہ ک کا طریق ایک زائد ہے۔

۶۱۔ مسئلہ۔ زائد پر کے کسی نقطہ کے پاسکی فاصلوں کا فرق مستقل رہتا ہے اور قاطع محور کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ ہم ثابت کرنا ہے کہ سن - سن = ۱۲

ن میں سے س کے جواب کے مرتب پر ن م اور م کے جواب کے مرتب پر عمود ن م نکالو۔ تب ن م خط مستقیم ہوگا۔

زائد کی تعریف کے بموجب س ن = ز × ن م

اور س ن = ز × ن م

اس لیے س ن = س ن = ز (ن م = ن م)

$$۱۱ = ۷۷ \times ز =$$

نوٹ (۱) اگر نقطہ ن زائد کی اس شاخ پر ہو جس کے اندر ماسکہ س

واقع ہے تو س ن = س ن = ۱۱ اور اگر نقطہ ن زائد کی اس شاخ پر ہو

جس کے اندر ماسکہ س واقع ہے تو س ن = س ن = ۱۱

نوٹ (۲) اس مسئلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے

زائد مرتسم کرنے کا مندرجہ ذیل جیومیٹریکی طریقہ (Mechanical method) حاصل ہوتا ہے۔

ایک بے پچک رستی کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ ب پر اور دوسرے سرے کو ایک سلاخ کے سرے ل پر باندھو اب سلاخ کے دوسرے سرے کو ایک ثابت نقطہ ۱ کے گرد پھراؤ اور رستی کو پینسل کی ایک نوک کے ذریعہ



اس طرح تناکر رکھو کہ پینسل ہمیشہ سلاخ ل پر حرکت کرے۔ تب پینسل کی نوک سے

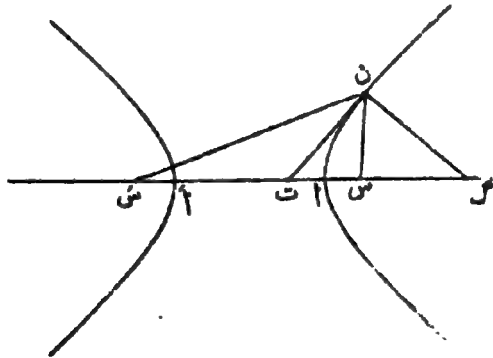
ایک قطعہ زائد مرسم ہوگا جس کے ماسکے نقاط ۱ اور ۲ پر ہونگے۔ کیونکہ نیپل کی ترک کے کسی مقام ن آئے لیے

۱ ن + ۱ ن ل = سلاخ کا طویل اور ب ن + ن ل = رسی کا طویل
اس لیے ۱ ن س ب ن = سلاخ اور رسی کے طولوں کا فرق جو مستقل ہے۔
ادھر کے جیلی غل سے زائد کی صرف ایک شاخ مرسم ہوتی ہے۔
دوسری شاخ حاصل کی جاسکتی ہے اگر سلاخ کے ثنابت سرے کو نقطہ ب کے گرد گھمایا جائے اور رسی کے سرے کو ثنابت نقطہ ۱ پر باندھ دیا جائے۔

مثلاً ۲۳

- (۱) زائد کے قاطع محور کے سروں اور ایک ماسکے مں کے مقام معلوم ہیں۔ زائد کو مرسم کرو۔
- (۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔
- (۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو دو دیے ہوئے دائروں کو مس کرے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔
- (۴) زائد کا مرکز قاطع محور کا طویل اور منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ ثنابت کرو کہ ماسکوں کا طریق ایک آد زائد ہے۔
- (۵) قطع ناقص کا ایک ماسکے اور اُس پر کے دو نقطے دیے ہوئے ہیں۔ ثنابت کرو کہ دوسرے ماسکے کا طریق ایک قطع زائد ہے۔
- (۶) اگر دو زائدوں کے ماسکے مشترک ہوں تو ثنابت کرو کہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔
- (۷) مکانی پر کے دو نقطے اور مکانی کے محور کی سمت معلوم ہیں۔ ثنابت کرو کہ مکانی کے ماسکے کا طریق ایک زائد ہے۔
- (۸) ایک مثلث کا قاعدہ اور نیز اندرونی دائرہ اور قاعدہ کا نقطہ تماس معلوم ہیں۔ ثنابت کرو کہ مثلث کے رأس کا طریق ایک زائد ہے۔

- (۹) ایک محدود خط ab پر ایک ثابت نقطہ ج ہے۔ کوئی دائرہ خط ab کو نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ a اور b سے اس دائرہ کے مماسات کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
- (۱۰) زائد کے ماسکے میں اور میں معلوم ہیں، نیز قاطع محور کا طول معلوم ہے۔ زائد پر کے متحدہ نقطے معلوم کرو۔
- (۱۱) اگر زائد کی سطح میں کوئی نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ق سے ق میں قاطع محور سے بڑا ہوگا، مساوی ہوگا، چھوٹا ہوگا، بموجب اس کے کہ نقطہ ق زائد کے اندر زائد کے اوپر یا زائد کے باہر ہو۔
- (۱۲) ناقص کا ایک ماسکے میں، ایک مماس اور ناقص پر کا ایک نقطہ ق معلوم ہیں۔ ناقص کے دوسرے ماسکے میں کا طریق معلوم کرو۔
- [اشارہ - مطلوبہ طریق ایک زائد ہے جس کا ایک ماسکے ق پر ہے اور دوسرا ماسکے میں کے خیال پر ہے جو دیے ہوئے مماس میں لیا جائے]
- ۶۲۔ مسئلہ۔ زائد پر کے کسی نقطہ ن پر کے مماس اور عماد زاویہ میں ن میں کے بالترقیب خارجی اور داخلی منصف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا عماد، مماس سے گ پر ملتا ہے

دفعہ ۱۹ کی رو سے

$$\text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اور س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{س گ}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}}$$

اس لیے ن گ زاویہ س ن س کا ایک منصف ہے۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ ن گ زاویہ س ن س کا خارجی منصف ہے،

چونکہ س گ = ز × س ن، اس لیے س گ کی چھٹی سے چھٹی

قیمت ز × س ن ہے۔

$$\text{یعنی س گ} < \text{ز} \times \text{س ن} = \text{س س}$$

اس لیے نقطہ گ، س س میں مدودہ پر واقع ہے۔

اس لیے ن گ زاویہ س ن س کا خارجی منصف ہے

چونکہ ن پر کا ماس، ن پر کے عماد پر علی القوائم ہے

اس لیے ن پر کا ماس ن ت زاویہ س ن س کا داخلی منصف ہے۔

امثلہ ۲۴

(۱) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ماسوں س، س کے جواب

کے مرتبوں سے بالترتیب س، س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات س س س

اور ن س کے متشابه ہیں۔ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ ن پر کا ماس

زاویہ س ن س کا اندرونی منصف ہے۔

[اشارہ - ن میں سے محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو مرتبوں سے

$$\text{م اور م پر ملے۔ تب } \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}} = \frac{\text{م ن}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن س}}$$

نیز زاویہ ن س س = زاویہ ن س س کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے۔

اس لیے مثلثات ن س س اور ن س س کے متشابه ہیں۔

- اس لیے \angle من ن ے = \angle من ن ے
یعنی ن پر کا ماس زاویہ من ن من کا اندرونی منصف ہے۔]
(۲) ثابت کرو کہ قاطع محمد کے کسی سرے پر کا ماس قاطع محمد پر عمود وار ہے۔
- (۳) زائد کا ایک ماسکو اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا ماس معلوم ہیں۔ دوسرے ماسکو کا طریق معلوم کرو۔
- (۴) زائد کا کوئی قطن ج ن ہے۔ ن پر کا ماس من ن سے نقطہ ت پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ من ن = من ت
(۵) اگر ایک ناقص اور ایک زائد کے دونوں ماسکے مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے کسی نقطہ قاطع پر کے ماسات ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔
- نوٹ۔ اگر دو خیموں کے نقطہ قاطع پر کے ماس ایک دوسرے پر عمود وار ہوں تو کہا جاتا ہے کہ سختی اس نقطہ پر ایک دوسرے کو عمولی القوام قطع کرتے ہیں۔
- اگر دو مرکز دار مخروطیوں کے دونوں ماسکے مشترک ہوں تو یہ مخروطی ہم ماسکو مخروطی کہلاتے ہیں۔
- ان تعریفات کی بناء پر اس سوال کے نتیجہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے " اگر ایک ناقص اور زائد ہم ماسکو ہوں تو وہ ایک دوسرے کو عمولی القوام قطع کرتے ہیں۔ "
- (۶) زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر مثلث ن من من کا محیط دائرہ مزدوج محمد سے نقطہ ہ اور ہ پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ہ اور ن ہ نقطہ ن پر کے ماس اور عادی ہیں۔
- [اشارہ۔ چونکہ قوس س ع = قوس من ع اس لیے ن ع زاویہ من ن من کا نصف ہے۔]
- (۷) زائد کے نقطہ ن پر کا ماس مزدوج محمد سے ع پر ملتا ہے۔

ثابت کرو کہ نقاط 'س'، 'ع'، 'س' مشترک المحيط ہیں۔

(۸) زائد کے نقطہ ن پر کا ماس قاطع محور سے مت پر اور مزدوج

ثابت پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$ ۔

(۹) زائد پر کوئی نقطہ نہ ہے۔ مرکز ج میں سے ن پر کے ماہ

متوازی خط کھینچا گیا ہے جو سن اور سن سے بالترتیب ع، ع یرمہ

ثابت کرو کہ مثلثات ج میں ع اور ج میں ع کے حائل دائرے مساوی

(۱۰) زائد کا ایک اسکے اور متناظر مرتب معلوم ہیں۔ نیز ایک دیا

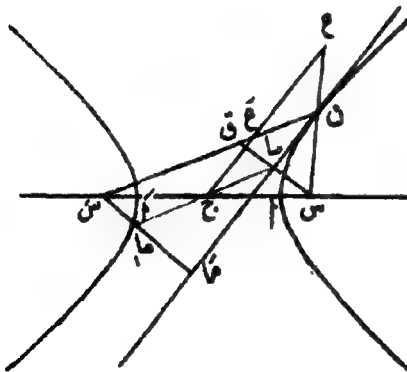
منہجی کو مس کرتا ہے زائد کے دوسرے پاسکے کا طریق معلوم کرو۔

۶۳۔ مسئلہ۔ اگر زائد کے ماسکوں میں سے کسی نقد

ماس پر عمروں سے ماس مائے نکالے جائیں تو عمروں کے پائیں ماس اور

قطر اے والے دائرہ راجم کو امدادی دائرہ کہتے ہیں (واقع

نیز $س\ م\ م\ م \times س\ م\ م = ج\ ب$



فرض کرو کہ میں حاضر ہوں اور میں نے کانٹھہ اٹھائی ہے

تب مثلثات ن ماس اور ن ماق میں

زاویہ س ن ما = زاویہ ق ن ما

(کیونکہ ن پر کا ماس زاویہ س ن س کا داخلی نصف ہے)

نیز زاویہ ن ماس = زاویہ ن ماق (کیونکہ ہر ایک قائم ہے)

اور ن ما دونوں مثلثات میں مشترک ہے۔

اس لیے مثلثات ن ماس اور ن ماق آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے س ما = ق ما اور س ن = ق ن

پس س ق = س ن - ق ن = س ن - س ن

= ۱۱ = ۱۲ ج ۱

چونکہ مثلث س س ق میں س س کا وسطی نقطہ ج ہے

س ق کا وسطی نقطہ ما ہے

اس لیے ج ما = $\frac{1}{2}$ س ق = ج ۱

اس لیے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے

من قطر ج ۱ ہے یعنی ما امدادی دائرہ پر واقع ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ما بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے

اب اگر ما ج امدادی دائرہ سے مکرر ما پہلے تو زاویہ ما ما ما

گا کیونکہ ما ما امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے۔

من بموجب عمل زاویہ ما ما س بھی قائم ہے اس لیے ما ما س

مستقیم ہے

ب مثلثات ج س ما اور ج س ما میں

ج س = ج س

ج ما = ج ما

اور زاویہ س ج ما = زاویہ س ج ما

یہ مثلثات ج س ما اور ج س ما ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

اس لیے س ما = س ما

پس $س\ م\ ا \times م\ م\ ا = س\ م\ ا \times س\ م\ ا = م\ م\ ا \times م\ م\ ا = ج\ ب$

(بموجب دفعہ ۵۸)

فرض (۱۱) اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے ماس کے متوازی ہو اور م ن اور م ن سے بالترتیب تقاطع اور غ پر ملے تو

$$ن\ ع = ن\ غ = ج\ ا$$

چونکہ ج م ا // ع ن اور ن م ا // غ ج

اس لیے ن م ا ج غ متوازی الاضلاع ہے

$$\text{یعنی } ن\ غ = ج\ م = ج\ ا$$

اسی طرح سے $ن\ ع = ج\ ا$

فرض (۲) اگر ایک ثابت نقطہ م سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے باہر م واقع ہے تو متغیر خط کا نصف ایک زائد ہوگا جس کا ایک ماسک م ہے۔

فرض (۳) اگر ایک متغیر خط پر خط کی مخالف جانبوں کے دو ثابت نقطوں سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب منتقل ہو تو متغیر خط کا نصف ایک زائد ہوگا جس کے اسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

امثلہ ۲۵

(۱) اگر اعدادی دائرہ پر کے کسی نقطہ م میں سے ایک خط مان کھینچا جائے جو ماس پر عمود وار ہے تو ثابت کرو کہ مان زائد کا ایک ماس ہوگا۔

(۲) اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے باہر کے ایک ثابت نقطہ م میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت زائد کو مس کرے گی۔

(۳) اگر زائد کا ایک ماسک ایک ماس اور قاطع محور کا طول معلوم ہو تو دوسرے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۴) مرکز دار مخروطی کا ایک ماسک اور دو ماس معلوم ہیں ثابت کرو کہ

کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۵) مرکز دار مخروطی کا ایک پاسکہ ادمین ماس معلوم ہیں۔ مخروطی کا

اور دوسرا پاسکہ معلوم کرو۔

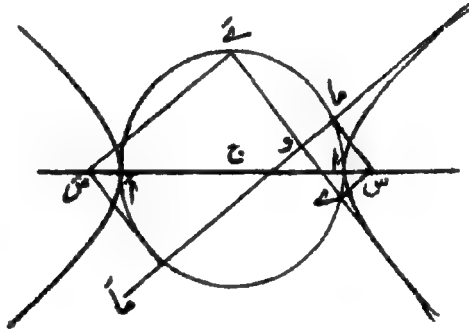
(۶) ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے تین ماسوں سے بننے والے مثلث کا

ایک دائرہ مخروطی کے ایک پاسکہ میں سے نہیں گزر سکتا تا وقتیکہ مخروطی مکافی نہ ہو۔

(۷) زاہد کا ایک ماس امدادی دائرہ سے ماسا پر ملتا ہے۔ ایک

ماس جو ماسا پر عمود وار ہے امدادی دائرہ سے مے مے پر اور ماسا سے

رہتا ہے۔ ثلثت کرو کہ $و م ا \times و م ا = ج ب^2$



[اشارہ۔ $و م ا \times و م ا = س ع \times س ع = ج ب^2$]

(۸) سوال بالا میں ثابت کرو کہ $ج و = ج ا$ ۔ ج ب

[اشارہ۔ $و م ا \times و م ا = ج ب^2$]

یعنی ج ا - ج و = ج ب یعنی ج و = ج ا - ج ب

نوٹ (۱) اس سوال سے ظاہر ہے کہ زاہد کے دو علی القیوم ماسوں کے

تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا

مربع = نیم قاطع محور کا مربع - نیم مزدوج محور کا مربع - اس دائرہ کو زائد کا مرکز کہتے ہیں۔

نوٹ (۲) زائد کے دو علی القوائم ماس صرف اُس صورت میں وجود ہیں جبکہ زائد کے قاطع محور کا طول مزدوج محور کے طول سے بڑا ہو۔

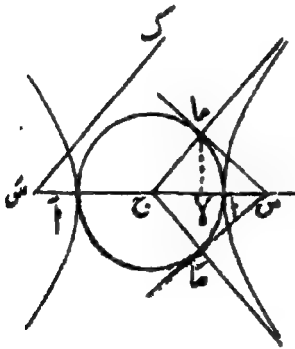
(۹) ایک دیے ہوئے نقطہ سے زائد کے ماسات کا جوڑا کھینچو

(۱۰) زائد کے ماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی

۶۴ - تعریف - اگر زائد کے نقطہ ن پر کا ماس ن ت ہو

ن مغنی پر حرکت کر کے لا تنابہ کی طرف آئے ہو تو خط ن ت کے انتہائی زائد کا ایک متقارب کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر متقارب مغنی کا وہ ماس ہے نقطہ تماس لا تنابہ پر ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ زائد کے دو متقارب ہیں جو زائد کے مرکز سے گزرتے ہیں۔



ایک ماسہ م میں سے اداوی دائرہ کے ماس م ما ، م صا کھینچو
تب ج ما ، ج صا (مزدوج) زائد کے متقارب ہونگے۔ چونکہ م اداوی دائرہ

ایک نقطہ ہے اور ج ما عمود وار ہے اس ما پر اس لیے دفعہ ۶۳ کے مسئلہ کے عکس کی رو سے ج ما زائد کا ایک ماں ہے۔ نیز اس کا نقطہ تماس ن وہ نقطہ ہے جہاں یہ ماں خط میں ک کو قطع کرتا ہے جو کہ دوسرے ماں کے میں سے ج ما کے متوازی کھینچا گیا ہے اور چونکہ میں ک اور ج ما باہم متوازی ہیں اس لیے ان کا نقطہ تقاطع ن لا متناہی پر ہے۔ پس ثابت ہوا کہ ج ما زائد کا ایک متقارب ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج ما بھی زائد کا ایک اور متقارب

ہے۔

ظاہر ہے کہ یہ دونوں متقارب زائد کے مرکز ج میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔ اگر ایک متقارب اور قاطع محور کا درمیانی زاویہ ص ہو تو

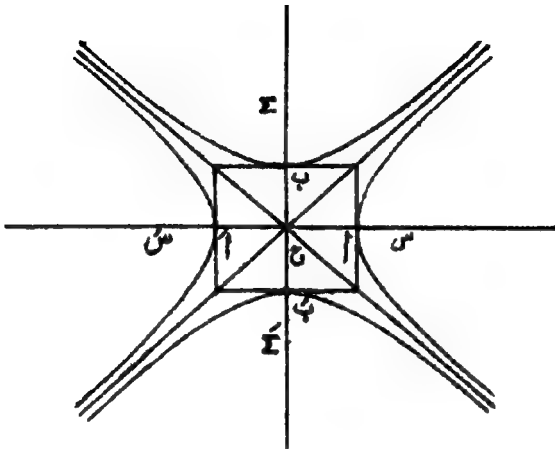
$$\text{قط ع} = \frac{\text{ج ما}}{\text{ج س}} = \frac{1}{1} = 1$$

نیز اگر ما قاطع محور سے لا پر لے تو ج لا = ج ما حجم ع = $\frac{1}{2}$ یعنی لا مرتب اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع یعنی مرتب کا پائیں ہے اور ما ماں کے جواب کا مرتب ہے۔ پس ثابت ہوا کہ زائد کے متقارب اعدادی دائرہ اور مرتب کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

۶۵۔ اگر قاطع محور کے سروں ۱، ۲ میں سے ۱۱ پر عمود وار خطوط

کھینچے جائیں اور مزدج محور کے سروں ب، ب میں سے ب پر عمود وار خطوط کھینچے جائیں تو ان چار خطوط سے جو مستطیل بنتا ہے اس کے قطر زائد کے متقارب ہونگے۔

ظاہر ہے کہ اس مستطیل کا ہر قطر زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔



اگر اس مستطیل کا ایک قطر قاطع محور کے ساتھ زاویہ $ع$ بنائے تو $س = ع = پ$

یعنی $قط = ع = ۱ + \frac{پ^۲}{و}$ یعنی $قط = ز$

پس معلوم ہوا کہ اس مستطیل کا ہر ایک قطر زاہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور قاطع محور کے ساتھ زاویہ $قط = ز$ بناتا ہے یعنی اس مستطیل کا ہر ایک قطر زاہ کا ایک متقارب ہے۔

۶۶۔ اگر ہمیں ایک زاہ کے قاطع محور اور مزدوج محور کے مقام اور طول

معلوم ہوں تو زاہ کی تعیین مکمل طور پر ہو جاتی ہے کیونکہ جب $ا ا$ اور $ب ب$ ثابت ہوں تو اسکے $س$ اور $س$ قاطع محور $ا ا$ پر ہونگے اور ان کے مقام کا تعین رشتہ $ج س = ج ا + ج ب$ سے ہوگا۔

نیز خروج المکرز = $ج س : ج ا$ اور اگر $ا ا$ پر نقاط $لا$ ایسے لے جائیں کہ $ج ا : ج ب = ز = ج ا : ج لا$ تو وہ خطوط $ج لا$ میں

گزرتے ہیں اور ۱۱ پر عمود وار ہیں زائد کے مرتب ہو گئے۔

۶۷۔ اب اگر ہم ایک زائد کھینچیں جس کے قاطع احد مزدوج محور باقی ہے۔
ب ب احد ۱۲ ہوں (یعنی اول الذکر زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہوں)
تو ظاہر ہے کہ اس زائد کے متقارب بھی وہی ہو گئے جو اقل الذکر زائد کے متقارب
ہیں۔ مشترک متقاربوں سے بننے والے چار زاویوں میں سے اُن دو مقابل کے
زاویوں میں جن کے اندر ۱ واقع ہیں اول الذکر زائد واقع ہے اور دوسرے
دو مقابل کے زاویوں میں جن کے اندر ب واقع ہیں دوسرا زائد واقع ہے۔
بلحاظ اول الذکر زائد کے موخر الذکر زائد کو مزدوج زائد کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ
موخر الذکر زائد کے لحاظ سے اول الذکر زائد مزدوج زائد ہو گا۔

کسی زائد احد اس کے مزدوج زائد کے خروج المرکز بالمعوم مساوی
ہیں ہوتے۔ اگر مزدوج زائد کا خروج المرکز نہ ہو تو $ز = ا + ب$
اور اگر ایک متقارب مزدوج زائد کے قاطع محور کے ساتھ زاویہ ب بنائے
تو $ز = قط ب = قط (۹۰ - ع) = ق م ع$ جہاں متقارب اور
ج ۱ کا درمیانی زاویہ ع ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ز}{ا} + \frac{ز}{ب} = \frac{ز}{ج م ع} + ج م ع = ا = ب$$

زائد احد مزدوج زائد کے خروج المرکز صرف اُس صورت میں مساوی
ہو گئے جبکہ ب = ا یعنی جبکہ متقارب احد قاطع محور کا درمیانی زاویہ
۹۰ کا ہو۔ اس خاص صورت میں متقابلوں کا درمیانی زاویہ قائم ہو گا۔

اگر زائد کے متقابلوں کا درمیانی زاویہ قائم ہو تو زائد کو قائم زائد
کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اس صورت میں مزدوج زائد بھی قائم زائد ہو گا۔ نیز ہر ایک کا
خروج المرکز ۹۰ ہو گا۔

۲۶۔ مسئلہ

(۱) قاطع محور کے ایک سرے ۱ پر کا ماس ایک متقارب سے

ف پر لٹا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ف = ج س
(۲) ماسک س سے ایک متقابل پر عمود س ما نکالا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ ج ما = ج ا اور ما = ج ب
(۳) اگر مزدوج زائد کے ماسکے ج، ب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ج \text{ ز} = ج \text{ ب} + ج \text{ ا} = ج \text{ س}$$

(۴) اگر وتر خاص محدود متقابل سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$س ک = ز \times ج ب$$

(۵) ثابت کرو کہ خط اب ایک متقابل کے متوازی ہے اور

اس کی تنصیف دوسرا متقابل کرتا ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ کسی متقابل کے متوازی ایک خط زائد سے
ایک اور صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے۔

(۷) اگر ماسک س کے جواب کا مرتب ایک متقابل سے ما پر

ملے تو ثابت کرو کہ

$$ج ما = ج ا \text{ اور } ج ما س = قائمہ$$

(۸) زائد کا ایک متقابل، دوسرے متقابل کی سمت اور

ایک ماسک معلوم ہیں۔ زائد کے رأس معلوم کرو۔

(۹) اگر ایک زائد کے دونوں متقابل اور ایک ماسک (جو لازماً متقابلوں

کے درمیانی زاویہ کے ایک منصف پر ہوگا) دیے گئے ہوں تو مرتب معلوم کرو۔

(۱۰) اگر زائد کا مرکز ایک متقابل اور ایک مرتب معلوم ہوں تو ماسک معلوم کرو۔

۶۸۔ مسئلہ۔ اگر زائد کے قاطع عمود پر عمود وار کوئی خط زائد سے

نقاط ن، ن پر اور متقابلوں سے نقاط س، س پر ملے تو

$$س ن \times ن س = س ن \times س ن = ج ب$$

یعنی $ع\ سُر - ع\ ن = ج\ ب$

چونکہ $ن\ ن$ اور $سُر\ سُر$ دونوں کی تخصیص $ع$ پر ہوتی ہے اس لیے

$$سُر\ ن = ن\ سُر \text{ اور } سُر\ ن = ن\ سُر -$$

اس لیے $سُر\ ن \times سُر\ ن = سُر\ ن \times ن\ سُر = ع\ سُر - ع\ ن = ج\ ب$

نوٹ - جیسے جیسے $ن\ ن$ $ع$ کا پائیں $ع$ مرکز $ج$ سے دُور

ہٹتا جاتا ہے $ن\ ع$ کا طول بڑھتا جاتا ہے یعنی $ن\ سُر$ کا طول بڑھتا جاتا ہے

اور چونکہ $سُر\ ن \times ن\ سُر$ مستقل رہتا ہے اس لیے $سُر\ ن$ کا طول بے حد

گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے نقطہ $ن$ منحنی پر حرکت کر کے لاتنا ہی کی طرف

جاتا ہے - اس لیے متقابل $ج$ سے نقطہ $ن$ کا عمودی فاصلہ بالآخر

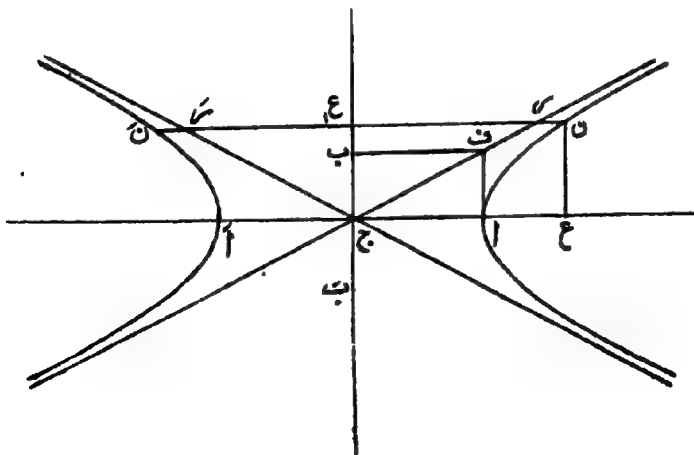
اُل بصر ہوتا ہے - پس معلوم ہوا کہ لاتنا ہی پر متقابل منحنی کے بے حد قریب

آ جاتا ہے -

۶۹- مسئلہ - اگر زاہد کے قاطع محور کے متوازی کوئی خط زاہد سے

نقاط $ن\ ن$ پر اور متقابلوں سے نقاط $سُر\ سُر$ پر ملے تو

$$ن\ سُر \times ن\ سُر = ن\ سُر \times سُر\ ن = ج\ ب$$



فرض کرو کہ ن ن فردوج محمد سے ع پر ملتا ہے۔

ن سے قاطع محمد پر محمود ن ع نکالو۔

فرض کرو کہ ر اُس ا پر کا ماس متقارب ج م سے ف پر ملتا ہے
تب ا ف = ج ب ا اس لیے ب ف متوازی ہوگا ج ا کے

$$\text{تب دفعہ ۶۰ کی رو سے} \quad \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ج ع}^2 - \text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2} \dots \dots \dots (۱)$$

نیز متشابه مثلثات ج ع م اور ج ب ف میں

$$(۲) \dots \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ا}^2} = \frac{\text{ج ب}^2}{\text{ب ف}^2} = \frac{\text{ج ع}^2}{\text{ع م}^2}$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے $\text{ع ن}^2 - \text{ج ا}^2 = \text{ع م}^2$

یعنی $\text{ع ن}^2 - \text{ع م}^2 = \text{ج ا}^2$

لیکن چونکہ م م ر ا ن ن دونوں کی تنصیف نقطہ ع پر ہوتی ہے

اس لیے ن م ر ا = م ن اور ن م ر ا = م ن

پس حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ن م ر ا} \times \text{ن م ر ا} = \text{ن م ر ا} \times \text{ن م ر ا}$

$$= \text{ع ن}^2 - \text{ع م}^2 = \text{ج ا}^2$$

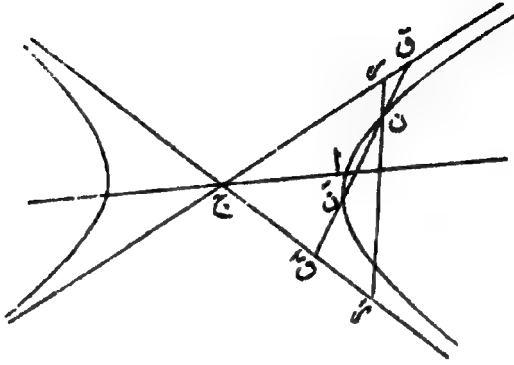
۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا ہوا کوئی خط

زائد سے نقاط ن ن پر اور متقاربوں سے نقاط ق ق پر ملے تو

ن ق \times ن ق مستقل ہوگا۔

ن میں سے قاطع محمد پر محمود وار ایک خط کھینچو جو متقاربوں سے

م م ر ا پر ملے۔



چونکہ خط ق ن قی ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہے،
اس لیے مثلثوں ن قی مر اور ن قی سر میں سے ہر ایک کے زاویے
غیر متبادل رہتے ہیں۔

اس لیے $\frac{ن قی}{ن قی}$ مستقل ہے نیز $\frac{ن قی}{ن قی}$ بھی مستقل ہے۔

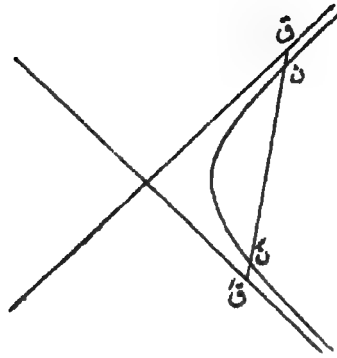
اس لیے $\frac{ن قی \times ن قی}{ن قی \times ن قی}$ بھی مستقل ہے۔

لیکن دفعہ ۶۸ کی رو سے $ن قی \times ن قی$ مستقل ہے۔
اس لیے $ن قی \times ن قی$ بھی مستقل ہے بشرطیکہ خط ق قی کی
سمت نہ بدلے۔

فرع۔ $ن قی \times ن قی = ن قی \times ن قی$

۷۱۔ مسئلہ۔ اگر کوئی خط زائد سے نقاط ن قی پر

اور مقابلوں سے نقاط ق قی پر لے تو $ن قی = ن قی$
چونکہ $ن قی \times ن قی = ن قی \times ن قی$



اس لیے $ن ق (ن ن + ن ق) = (ن ن + ن ق) ن ق$
 یعنی $ن ق \times ن ن + ن ق \times ن ق = ن ن \times ن ق + ن ق \times ن ق$
 یعنی $ن ق \times ن ن = ن ن \times ن ق$
 یعنی $ن ق = ن ق$

فرع (۱) ق ق کا وسطی نقطہ ن کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

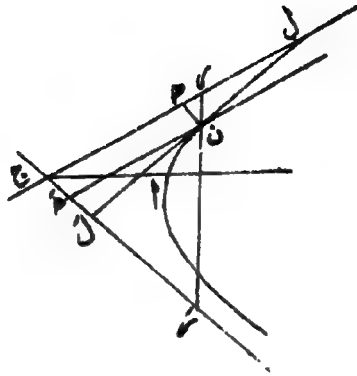
فرع (۲) اگر زائد کے نقطہ ط پر کاٹا اس متقابلوں سے ل ل پرے تر ل ل کا وسطی نقطہ ط ہوگا۔

۲۔ مسئلہ۔ زائد کے کسی ٹاس اور متقابلوں سے بننے والے

مثلث کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کاٹا اس متقابلوں سے ل ل پر لٹا ہے۔

نیز فرض کر دو کہ ن میں سے قاطع محور پر عمود وار خط متقابلوں سے سرسٹا پر لٹا ہے۔ ن میں سے متقابل ج سرسٹا کے متوازی خطہ ن ھ کمپیچر



جو دوسرے متقارب سے ہ پر لے۔ اور ن میں سے متقارب ج س کے متوازی
خط ن ہ کی پیچو جو دوسرے متقارب سے ہ پر لے۔

فرض کرو کہ قاطع محور اور ایک متقارب کا درمیانی زاویہ عہ ہے

تب مثلث ن س ہ میں

$$\angle ن س ہ = ۲ عہ$$

$$\angle س ن ہ = (۹۰ - عہ)$$

$$\therefore \frac{ن س}{س ہ} = \frac{\sin(۹۰ - عہ)}{\sin ۲ عہ} = \frac{\cos عہ}{۲ \sin عہ \cos عہ} = \frac{۱}{۲ \sin عہ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sin عہ} = \frac{ن س}{س ہ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sin عہ}$$

$$\text{اس لیے } ن س = ۱/۲ \times س ہ \times \sin عہ$$

اسی طرح سے مثلث ن س ہ میں

$$ن ہ = ۱/۲ \times س ہ \times \sin عہ$$

$$\text{اس لیے } ن س \times ن ہ = ۱/۲ \times س ہ \times س ہ \times \sin عہ \times \sin عہ$$

$$\text{لیکن دفعہ ۶۸ کی رو سے } ن س \times ن ہ = س ہ^۲ \times \sin عہ$$

$$\text{اس لیے } ن س \times ن ہ = س ہ^۲ \times \sin عہ = ۱/۲ \times س ہ^۲ \times \sin عہ \times ۲$$

اب مثلث ج ل ل میں ضلع ل ل کا وسطی نقطہ ن ہے
اور ن ھ اور ن ھ بالترتیب ج ل اور ج ل کے متوازی ہیں
اس لیے مثلث ج ل ل کا رقبہ = $۲ \times$ متوازی الاضلاع ج ھ ن ھ کا رقبہ

$$\begin{aligned} &= ۲ \times ج ھ \times ج ھ \times جب ھ ج ھ \\ &= ۲ \times ن ھ \times ن ھ \times جب ھ ن ھ \\ &= ۲ \times \frac{۱}{۲} ب^۲ ق م^۲ ع^۲ \times جب ھ ن ھ \\ &= \frac{۱}{۲} ب^۲ ق م^۲ ع^۲ \times ۲ جب ھ ن ھ جم ھ \\ &= \frac{۱}{۲} ب^۲ ق م^۲ ع^۲ \times ۲ جم ھ \\ &= \frac{۱}{۲} ب^۲ ق م^۲ ع^۲ = ب^۲ ق م^۲ ع^۲ = ب^۲ \times \frac{۱}{۲} = ب^۲ \end{aligned}$$

فرع (۱) ج ل \times ج ل مستقل ہے کیونکہ مثلث ج ل ل کا
زاویہ ج مستقل ہے نیز اس مثلث کا رقبہ بھی مستقل ہے۔
فرع - اگر رأس ۱ پر کا کاس متقابلوں سے ف ف پر ملے تو
ج ل \times ج ل = ج ف \times ج ف = ج ف = ج ف = ج ف

مثلاً

(۱) زائد کے متقابل اور زائد پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ زائد کو
مرسم کرو۔
اشارہ - دفعہ ۶۸ کا سہل استعمال کرو۔

(۲) اگر دو متقاطع خطوط مستقیم ج سر ج سر پر نقاط سر سر اس طرح
لیے جائیں کہ مثلث ج سر سر کا رقبہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ سر سر کے وسطی نقطہ کا
طریق ایک زائد ہے جس کے متقابل ج سر ج سر ہیں۔

(۳) زائد کے نقطہ ن پر کا کاس ایک متقابل سے ل پر
متاہے اور ل میں سے دوسرے متقابل کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے

(۶) زائد کا ایک متقارب، زائد پر کے دو نقطہ اور ان نقطوں میں سے ایک پر کا ماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

(۷) زائد کے نقطہ پر کا ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے اور ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ گ ل = گ ل

(۸) زائد کا کوئی وتر ن ن متقاربوں سے ق، ق پر ملتا ہے اور اس وتر کے متوازی ایک ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے اور زائد کو عم پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن ق \times ق ن = ع ل$

(۹) اگر زائد کے کوئی دو ماس کھینچے جائیں تو ان ماسوں اور متقاربوں کے نقاط تقاطع کو ملانے والے خطوط متوازی ہونگے۔

(۱۰) زائد کا ایک متقارب، دو ماس اور ان دو ماسوں میں سے ایک کا نقطہ ماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرتسم کرو۔

(۱۱) زائد کا کوئی ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ل، ل کو ایک معلوم نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا طریق ایک زائد ہے۔

(۱۲) زائد کا کوئی ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ج ل \times ج ل = ج س$ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلثات ل ج س اور س ج ل متساوی ہیں۔

(۱۳) ایک متحرک خط دو ثابت خطوط سے مل کر مستقل رقبہ والا مثلث منقطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک خط ہمیشہ ایک زائد کو لٹ کرتا ہے۔

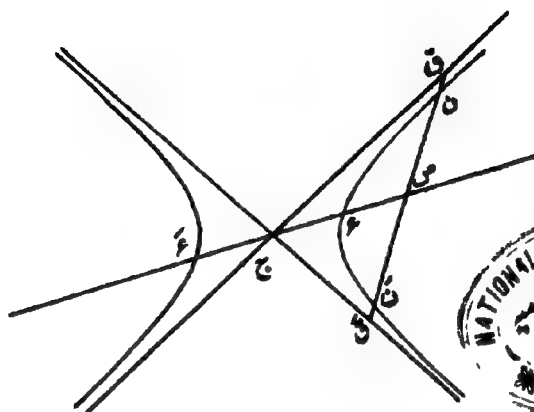
(۱۴) ثابت کرو کہ قائم محوروں کے حوالہ سے مساوات لاما = مستقل کی ترسیم ایک قائم زائد ہے۔

۳۔ مسئلہ۔ اگر زائد کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو

ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خط مستقیم ہو گا جو زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ زائد کے متوازی وتروں کے ایک نظام کا کوئی ایک مرکز ہو

نقاط ن ن پر اور متقاربوں سے نقاط ق ق پر ملتا ہے۔



فرض کرو کہ ن ن کا وسطی نقطہ ص ہے تب دھوا کی دوسری ق ق کا وسطی نقطہ بھی ص ہوگا۔

چونکہ ن ن کی یعنی ق ق کی سمت نہیں بدلتی اور نسبت متقارب ج ق ج ق ثابت ہیں اس لیے ق ق کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن ن کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

تعریف - زائد کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کو زائد کا قطر کہتے ہیں۔

طرح - اگر زائد کے حوازی دھوا کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر زائد سے نقاط ع ع پر ملے تو ع ع پر کے حاسات

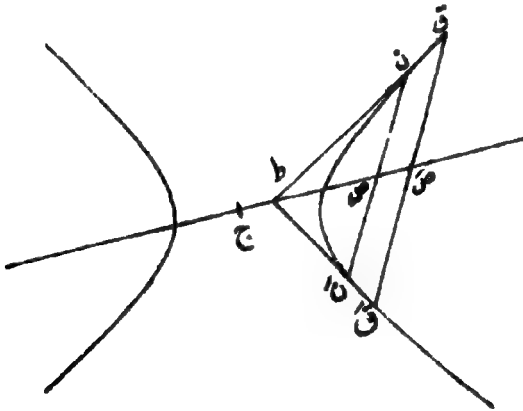
ان وتروں کے متوازی ہونگے۔

ع میں سے ایک خط دیے ہوئے وتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط زائد سے گزر نقطہ ہ پر ملتا ہے چونکہ زائد کا وتر ع ہ دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے اس لیے ضروری ہے کہ ع ہ کا وسطی نقطہ قطر ع و پر واقع ہو اور یہ صرف اسی صورت میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ نقطہ ہ نقطہ ع پر منطبق ہو اس لیے وہ خط جو ع میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ ع پر زائد کا ماس ہے۔ یعنی ع پر زائد کا ماس دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ع پر کا ماس بھی دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔

۶۴۔ مسئلہ۔ زائد کے کسی وتر کے سروں پر کے ماسات کا

نقطہ تقاطع اس قطر پر واقع ہوتا ہے جو وتر مذکور کی نصف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ زائد کا ایک دیا ہوا وتر ن ہے ایک اور وتر ق،

وترن ن کے متوازی کھینچو۔ فرض کرو کہ ن ق اور ق ق کے وسطی نقطے ص ص ہیں۔

تب ص ص میں پیسے گزرنے والا خط زائد کا ایک قطر ہوگا۔
فرض کرو کہ ن ق قطر ج ص ص سے ط پر ملتا ہے۔

$$\text{تب } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

لیکن اذریوے علی ص ن = ص ن اور ص ق = ص ق

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

اس لیے ن ق ق ایک خط مستقیم ہے۔
یعنی ن ق، ن ق کا نقطہ تقاطع ط زائد کے اُس قطر پر واقع ہے
جون ن کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ وتر ق ق اپنے متوازی حرکت کرتا ہوا وترن ن کے قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب اتہا میں ن ق اور ن ق بالترتیب ن اور ن پر کے ماس بن جائینگے۔

پس معلوم ہوا کہ وترن ن کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو وتر مذکور کی تنصیف کرتا ہے۔

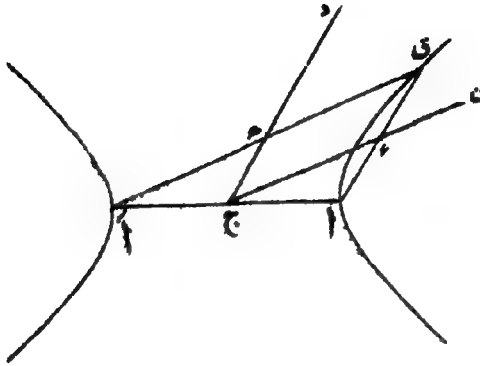
۷۵۔ مسئلہ۔ اگر زائد کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی

وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔

فرض کرو کہ زائد کا ایک قطر ج ن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

رأس ۱ میں سے ج د کے متوازی وتر ۱ ق کھینچو اور ۱ ق کو ملاؤ

فرض کرو کہ اق اور جن کا نقطہ تقاطع ع ہے اور اق اور ج د کا نقطہ تقاطع ہ ہے۔



حسب مفروض اق کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔
 مثلث اق ایس اق کا وسطی نقطہ ع ہے اور اا کا وسطی نقطہ ج ہے
 اس لیے اق ج ع کے متوازی ہے۔
 ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر اق کا وسطی نقطہ ہ ہے
 چونکہ ج ہ مثلث اق ا کے ضلع اا کے وسطی نقطہ ج میں
 سے گزرتا ہے اور ضلع اق کے متوازی ہے اس لیے اق کا وسطی نقطہ
 ہ ہے، اس لیے اق کے متوازی وتروں کی تنصیف ج د کرتا ہے۔
 یعنی قطر جن کے متوازی وتروں کی تنصیف قطر ج د کرتا ہے۔
 تعریف۔ اگر زاویہ کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں
 کی تنصیف دوسرا قطر کرے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف
 پہلا قطر کرے) تو ان قطروں کو محمہ دوج قطر کہتے ہیں۔
 نوٹ :- زاویہ کے قاطع محمہ اور محمہ دوج قطروں کی خاص صورت ہے۔

پس ثابت ہوا کہ جن 'ج' د مزدوج قطریں۔

امثلة

(۱) زائد کے وہ ترکیبیں جن کے وسطی نقطہ ایک دیے ہوئے قطر پر واقع ہیں۔

(۲) نقطہ و سے زائد کے دو ماس ون 'وق' کہنے لگے ہیں۔
ثابت کرو کہ ج و اور ن ق مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ج ن کے مزدوج قطر کے متوازی ہے۔

(۴) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس متقاربوں سے ل ل پر ملتا ہے اور ل میں سے مزدوج زائد کا ایک ماس ل د ل کہینا گیا ہے جو مزدوج زائد کو نقطہ د پر ص کرتا ہے اور متقارب ج ل کو ل پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ل اور ج د ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور طول میں مساوی ہیں۔

[اشارہ - چونکہ مثلث ج ل ل کا رقبہ

= مثلث ج ل ل کا رقبہ

اس لیے ل ل کا وسطی نقطہ ج ہے۔

نیز ل ل کا وسطی نقطہ د ہے

اس لیے ج د متوازی ہے ل ل کے اور ج د = ل ل = ن ل]

(۵) سوال بالائی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ج ن، ج د مزدوج

قطریں۔

(۶) ثابت کرو کہ ن د کا وسطی نقطہ متقارب ج ل پر ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث ج ن د کا رقبہ مستقل ہے۔

(۸) اگر ج ن، ج د زائد کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ یہ

مزدوج زائد کے بھی مزدوج قطریں۔

(۹) زائد کے مزدوج قطروں میں سے صرف ایک قطر زائد سے

حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔

(۱۰) زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقاط 'ن' 'ن' پر

اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقاط 'د' 'د' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط 'ن' 'ن' 'د' 'د' پر کے مماسات سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے جس کے راس متقاربوں پر ہیں اور جس کا رقبہ مستقل مقدار ۴۴ لب کے مساوی ہے۔

(۱۱) زائد کے کسی نقطہ 'ن' پر کا مماس ایک متقارب سے 'ل' پر ملتا

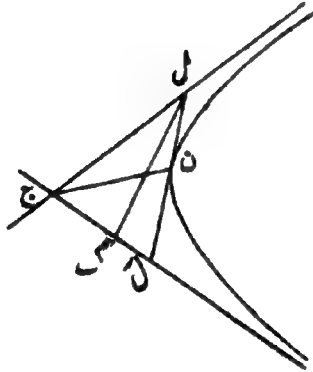
ثابت کرو کہ ج'ن - ن'ل = ج'ا - ج'ب (جو مستقل ہے)

فرض کرو کہ 'ن' پر کا مماس دوسرے متقارب سے 'ل' پر ملتا ہے
ل سے ج'ل پر عمود لکھنا۔

چونکہ ل'ل کا وسطی نقطہ 'ن' ہے اس لیے ج'ل + ج'ن

$$= ج'۲ن + ج'۲ن$$

$$\text{نیز } ج'ل + ج'ل - ج'۲ل \times ج'ک = ل'ل = ج'۲ن$$



پس حاصل ہوتا ہے کہ ج'ل \times ج'ک = ج'ن - ن'ل

$$\text{اب } ج'ل \times ج'ک = ج'ل \times ج'ل \times \frac{ج'ک}{ج'ل} = \text{مستقل}$$

(کیونکہ ج ل × ج ل مستقل ہے اور نیز ج ل بھی مستقل ہے)۔

پس ثابت ہوا کہ ج ن - ج ل مستقل ہے۔

اب اگر ماس کا نقطہ تماس رأس ا پر آ جائے تو

ج ن - ن ل = ج ا - ج ب

(۱۲) اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن

اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ن - ج د = ج ا - ج ب

نوٹ (۱) - اگر دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن پر اور

دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ ق پر ملے تو ج د کے طول کو نیم قطر ج ن کے مزدوج قطر کا طول کہتے ہیں۔

نوٹ (۲) - اوپر کے سوال میں زائد کے مزدوج قطروں کے متعلق ذیل کا

مسئلہ ثابت ہوا ہے - "زائد کے نیم مزدوج قطروں کے مربعوں کا فرق مستقل ہوتا ہے"

(۱۳) اگر دیا ہوا زائد قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ ج ن = ج د

نیز ثابت کرو کہ ج ن، ج د متقارب کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۱۴) ثابت کرو کہ قائم زائد کا کوئی وتر اور اس کے وسطی نقطہ میں سے

گزرنے والا قطر کسی متقارب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ قائم زائد کے تکمیلی وتروں کا کوئی زوج کسی متقارب

سے مساوی زاویے بناتا ہے۔

(۱۶) قائم زائد پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے اور اس کے مزدوج زائد پر

ایک نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ زاویہ ج ن د قائم ہے ثابت کرو کہ

ج ن = ج د

مسئلہ ۲۹

(زائد پر متفرق سوالات)

(۱) کاغذ پر ایک زائد کھینچا ہوا ہے۔ اس کے فرضی اجزاء

معلوم کرو۔

(۲) زائد کی ایک ہی شاخ پر کے دو نقطوں ن اور ن پر کے ماسوں

کا نقطہ تقاطع وہ ہے۔ ثابت کرو $\angle س و ن + \angle س و ن = ۲ قائے$

[اشارہ - فرض کرو کہ ن اور ن زائد کی اُس شاخ پر ہیں جس کے اندر

ماسد س ہے۔ فرض کرو کہ س ن، س ن سے ہر پرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\angle س و ن = ۲ قائے - \frac{1}{p} \times \angle س ه س$$

نیز ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \frac{1}{p} \times \angle س ه س$]

(۳) زائد کی مختلف شاخوں پر کے دو نقطوں ن اور ن پر کے ماسوں

کا نقطہ تقاطع وہ ہے، ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \angle س و ن$

[اشارہ - فرض کرو کہ س ن اور س ن ایک دوسرے کو ہر پر

قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \frac{1}{p} \times \angle س ه ن$

$$\text{اور } \angle س و ن = \frac{1}{p} \times \angle س ه ن$$

(۴) زائد کا کوئی ماس متقابلوں سے ل، ل پر ملتا ہے۔

ثابت کرو کہ ل ل کے محاذی کسی ایک ماسہ پر متقابل ملتا ہے۔

(۵) ایک خط ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت

علی القوام خطوط و ا، و ب سے ا اور ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا ب کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

[اشارہ - و ن کے وسطی نقطہ ج میں سے و ا، و ب کے

متوازی خطوط ج لا، ج ما کھینچو۔ ثابت کرو کہ ج لا، ج ما سے ا ب کے

وسطی نقطہ کے عمودی فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔]
 (۶) زائد کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو زائد کے ایک متقارب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
 (۷) قائم زائد پر کے دو نقطے اور مرکز معلوم ہیں۔ قائم زائد کو مرکز کو۔
 [اشارہ۔ اگر دیے ہوئے نقطوں ن اور ج کو ملنے والے وتر کا وسطی نقطہ ص ہو اور اگر ن ق متقاربوں سے سر، سر پر لے تو ج ص = ص سر اور اس کی دوسرے متقارب کھینچ سکتے ہیں۔]
 (۸) ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا ہوا کوئی خط دو ثابت زائدوں سے جن کے متقارب مشترک ہیں نقاط ن ق اور ق ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق \times ق ق مستقل ہے۔
 (۹) کوئی خط زائد کے متقاربوں سے سر، سر اور مزدوج قطروں کے کسی ایک زوج سے ن ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ سر، سر کی موسیقی تقسیم ن ق پر ہوتی ہے۔
 [اشارہ۔ فرض کرو کہ ج ن زائد سے م پر ملتا ہے، م پر کا ماس ج ن کے متوازی ہوگا اگر م پر کا ماس متقاربوں سے ل ل پر ملے تو ل م = م ل اس لیے ج (سر ن سر ن) موسیقی بسل ہے۔ اس لیے سر، سر کی موسیقی تقسیم ن ق پر ہوتی ہے۔]
 (۱۰) زائد پر کے دو نقطوں ق ق پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع وہ ہے، وہیں سے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو متقاربوں سے م م پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ م م ق ق کے متوازی ہے۔
 [اشارہ۔ فرض کرو کہ ق ق متقاربوں سے سر، سر پر ملتا ہے۔ تب ج و، سر، سر کے وسطی نقطہ میں سے گزرے گا۔ نیز چونکہ ج م، و م متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج و، م م کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے یعنی سر، سر اور م م دونوں کے وسطی نقطے ج و پر واقع ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ سر، سر // م م]

(۱۱) ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو دو ثابت
 خطوط ولا، وما سے ق، ق پر مٹا ہے اور ق ق پر نقطہ ن اس طرح
 لیا گیا ہے کہ ق ن = ق ن - ثابت کر دو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے
 جس کے متقابل ولا، وما ہیں -

(۱۲) ا ب ج د ایک مربع ہے - ایک قائم زاہد کھینچا ہے جس کے
 متقابل ا ب، ا د ہیں اور ایک اس کے ج ہے - ثابت کر دو کہ یہ زاہد اضلاع
 ج ب، ج د کے وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے -

ضمیمہ (الف)

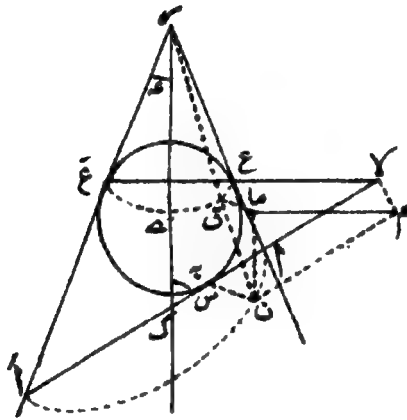
مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں

تاریخی نوٹ — مخروطات کے خواص کے ابتدائی انکشافات Menaechmus سے منسوب کیے جاتے ہیں جو چوتھی صدی قبل مسیح میں گزرا ہے۔ مخروطات پر سب سے پہلی منظم بحث اقلیدس (۳۲۲-۲۸۳ قبل مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کی تھی۔ لیکن یہ کتاب اب کاغذ ہے۔ Appolonius (۲۶۲-۲۰۵ قبل مسیح) کی مشہور کتاب "Kwvika" کا ماخذ اقلیدس کی مذکورہ بالا کتاب ہی تھی۔ Appolonius کی اس کتاب میں مخروطات کے غیر اسکی خواص پر نہایت مکمل بحث درج ہے۔ اور نیسنز یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مستدیر مخروط کو مختلف میلان والی مستوی سطحوں سے قطع کرنے سے مخروطی کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ مخروطی کی مختلف قسموں کے نام بھی Appolonius ہی کے وضع کردہ ہیں۔

مخروطات کی ماسکہ مرتب خاصیت کا ذکر پہلے پاپس Pappus (۳۰۰ سال بعد مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کیا ہے۔ مگر اس اہم خاصیت پر Newton کے زمانہ تک کوئی قابلِ بھاط تحقیقات وجود میں نہیں آئیں۔ نیوٹن کی کتاب Principia میں اس خاصیت اور اس کے مستنبطات پر مدلل بحث مندرج ہے۔ حقیقی ماسکوں کے نظریہ کی تشریح Kepler (۱۵۷۱-۱۶۳۰ء) نے کی ہے اور لفظ "Focus" اسی کا وضع کردہ ہے۔ لیکن وہ طریقہ جس میں مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں

اس کے مرتب خاصیت کی تحقیق میں اس کی کرہ کا استعمال کیا گیا ہے۔ Dandelin
(۱۸۲۲ء) اور Morton (۱۸۲۵ء) کا لیکچر ذکر کردہ ہے۔

مسئلہ - اگر ایک قائم مستدیر مخروط کا نیم راسی زاویہ α ہو اور
اگر ایک سطح مستوی ایسی کھینچی جائے جو مخروط کے محور کے ساتھ زاویہ β بنائے
تو مستوی تراش ایک مخروطی ہوگی جس کا خروج المرکز ققط α حجم β ہوگا



مخروط کے اندر ایک کرہ بناؤ جو مخروط کو دائرہ CC پر اور سطح تقاطع کو SS پر
مس کرے۔ اس کرہ کا مرکز S مخروط کے محور SS پر واقع ہے جو سطح تقاطع
کو k پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح، سطح SS میں ہے جو مخروط کو خطوط
 SA پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مستوی سطح مخروط کے
متنحی تقاطع پر کا کوئی نقطہ N ہے۔

فرض کرو کہ مستوی CC تقاطع SS پر A کو M پر قطع کرتی ہے۔
فرض کرو کہ N سے سطح CC پر عمود MA ہے اور فرض کرو کہ

سرن مستوی ع ق ع کو ق پر قطع کرتا ہے۔ ماق کو طاؤ اور ماسے لام پر عمود مام نکاو۔ ن م کو طاؤ۔ مستوی ان آ میں نقطہ میں سے گزرنے والا ہر خط کرہ (مے) کا ماس ہے اور اس لیے میں سے پر (جو) کاغذ کی سطح میں ہے) عمود وار ہے۔ اس لیے مستوی ان آ کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے نیز سطح ع ق ع بھی کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے۔ اس لیے مستویوں ع ق ع اور ان آ کا خط تقاطع لام کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے اور اس لیے خط آ آ پر عمود وار ہے۔ چونکہ ن ماس سطح ع ق ع پر عمود وار ہے اور مام خط لام پر عمود وار ہے اس لیے ن م خط لام پر عمود وار ہے۔ اس لیے ن م متوازی ہے آ آ کے نیز ن م متوازی ہے سرک کے کیونکہ ان میں سے ہر ایک خط سطح ع ق ع پر عمود وار ہے۔

اس لیے \angle مان م $= \angle$ سرک آ $= 90^\circ$
 نیز \angle ق ن م $= \angle$ ق سرک $=$ مخروط کا نیم راسی زاویہ ہے
 اب مثلث ق ن م میں \angle ق مان $= 90^\circ$

اس لیے ق ن $=$ ن م \times قط ع
 مثلث ن م م میں \angle ن مام $= 90^\circ$

اس لیے ن م $=$ ن م \times جم ہے

اس لیے ق ن $=$ ن م \times قط ع \times جم ہے

لیکن ن ق $=$ ن م کیونکہ دونوں کرہ (مے) کے ماس ہیں۔

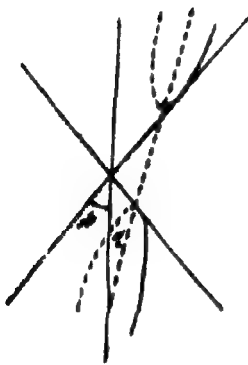
اس لیے م ن $=$ ن م \times قط ع \times جم ہے

اس لیے $\frac{م ن}{ن م} = \frac{قط ع \times جم}{م ن}$ مستقل

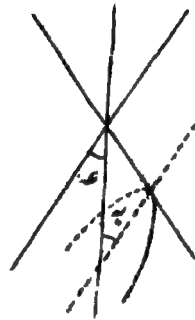
اس لیے ن کا طریق ایک مخروطی ہے جس کا اسکے میں ہے مرتب

لام ہے اور خروج المركز قط ع جم ہے۔

فرض۔ ایک دیے ہوئے مخروط کی مختلف مستوی تراشوں کے لیے مخروطی تراش کا خروج مرکز Z ایسے بدلتا ہے جیسے جسم بہ
 نوٹ (۱) اگر $b = e$ تو $z = 1$
 تب قاطع مستوی مخروط کے ایک تکوینی خط کے متوازی ہوگا اور مخروطی تراش ایک
 مکانی ہوگی (دیکھو شکل ذیل ۱)۔



شکل ۱۔



شکل ۲۔

اگر $b < e$ تو $z > 1$
 تب مخروطی تراش ایک ناقص ہوگی
 اگر $b > e$ تو $z < 1$
 تب قاطع مستوی دُہرے مخروط کی دونوں شاخوں کو قطع کریگا اور مخروطی تراش
 زائد ہوگی۔ (دیکھو شکل بالا ۳)
 نوٹ (۲) اگر $b = e$ کو اس کی کہتے ہیں کیونکہ یہ کرہ قاطع سطح مستوی کر
 مخروطی تراش کے ایک ہمسکہ پر مس کرتا ہے۔

مسا ہے۔

ن ق سے مرقب پر عمود ن م ق ع لگاؤ۔

$$\text{تب } \frac{\text{من ن}}{\text{ن و}} = \frac{\text{ز ن} \times \text{م}}{\text{ز} \times \text{و د}} = \frac{\text{ن م}}{\text{و د}} = \frac{\text{ن م}}{\text{و س}}$$

اس لیے شکل بالا میں مثلثات من ن م اور س و د متشابه ہیں
اس لیے ن م متوازی ہے ن و کے

اسی طرح سے ق م متوازی ہے ق و کے

فون کر دو کہ خط مستقیم و ن ق ق خطوں کے مرتب سے زاویہ ط بنا تا ہے
م اور س سے دائرہ (و) کے ماس م ک اور س م کینچو۔

$$\text{چونکہ ن م} \parallel \text{و ن} \quad \text{اس لیے} \quad \frac{\text{و ن}}{\text{و س}} = \frac{\text{من ن}}{\text{س ن}}$$

$$\text{نیز چونکہ ق م} \parallel \text{و ق} \quad \text{اس لیے} \quad \frac{\text{و ق}}{\text{و س}} = \frac{\text{م ق}}{\text{س ق}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و س}} = \frac{\text{من ن} \times \text{م ق}}{\text{س ن} \times \text{س ق}} = \frac{\text{س ک}^2}{\text{س م}^2}$$

$$\text{اب س م}^2 = \text{و س} - \text{د س} = \text{و س} - \text{ز}^2 \times \text{و د}$$

$$\text{اور چونکہ } > \text{و س د} = \text{ط} \quad \text{اس لیے} \quad \text{و د} = \text{و س} \times \text{ج ب ط}$$

$$\text{اس لیے س م}^2 = \text{و س} - \text{ز}^2 \times \text{و س} \times \text{ج ب ط} = \text{و س} (1 - \text{ز}^2 \text{ج ب ط})$$

$$\text{اس لیے و ن} \times \text{و ق} = \text{س ک}^2 \times \frac{\text{و س}}{\text{س م}^2}$$

$$= \frac{\text{س ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{ج ب ط}}$$

اگر خط و ن ق مرتب سے زاویہ ط بنائے تو حسب بالا ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{و ن} \times \text{و ق} = \frac{\text{س ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{ج ب ط}}$$

اس پر $\frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{۱ - \text{ز} ۲ \text{ جب } ط}{۱ - \text{ز} ۲ \text{ جب } ط}$ جو مستقل ہے۔

نوٹ (۱) مسئلہ بالا کے استعمال میں یاد رہے کہ 'ون'، 'وق'، 'ون'، 'وق' کے طول لینے میں مقدار اور علامات دونوں ملحوظ رکھے جانے چاہئیں۔

نوٹ (۲) اس نتیجہ کی کئی ایک اہم خاص صورتیں ہیں۔

(۱) اگر 'ون' اور 'وق' کے متوازی ماسکی وتر عس ہ

$$\text{اور عس ہ ہوں تو } \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{س} ۶ \times \text{س} ۵}{\text{س} ۶ \times \text{س} ۵} = \frac{\text{ع} ۶}{\text{ع} ۶}$$

(۲) اگر 'ون' اور 'وق' کے متوازی علامت ط ہے

$$\text{اور ط ہے ہوں تو } \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ط} ۶ \times \text{ط} ۵}{\text{ط} ۶ \times \text{ط} ۵} = \frac{\text{ط} ۶}{\text{ط} ۶}$$

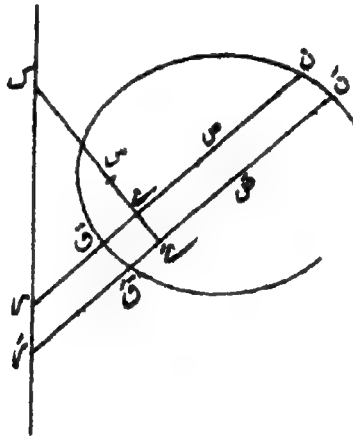
(۳) مرکبہ اور غلطی کی صورت میں اگر 'ون' اور 'وق' کے متوازی

$$\text{قطر د ج ذ اور ع ج ع ہوں تو } \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ج} ۵ \times \text{ج} ۴}{\text{ج} ۵ \times \text{ج} ۴} = \frac{\text{ج} ۴}{\text{ج} ۴}$$

نوٹ (۳) نمونہ کے مسئلہ کی مدد سے دفعات ۲۶، ۳۳ اور ۶۰ کے نتائج آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

ضمیمہ (ج)

مسئلہ۔ مخروطی کے متوازی دتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں ماسکہ میں سے دتروں پر کا اعمود متاظر مرتب سے قتا ہے۔



فرض کرو کہ متوازی دتروں کے دیے ہوئے نظام کا ایک مرکز ن ق ہے اور اس کا وسطی نقطہ ص ہے۔

فرض کرو کہ ماسکہ ص سے ن ق پر کا عمود ن ق سے ہے پر اور ماسکہ ص کے جواب کے مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

$$\text{تب} = \frac{\text{سن}}{\text{ن}} = \frac{\text{س ق}}{\text{ق م}}$$

$$\frac{\text{سن}^1}{\text{نہر}^1} = \frac{\text{سن}^1 - \text{سقی}^1}{\text{نہر}^1 - \text{قیہر}^1} \quad \text{اس لیے}$$

لیکن سن' - سق' = ن'۔ ع' ق' = م ص ع x م ص

نیز ن را - ق را = ۴۴ ص × ۵ ص

$$\frac{\text{مے م}}{\text{م م}} = \frac{\text{م م} \times \text{م م}}{\text{م م} \times \text{م م}} = \frac{\text{م م}}{\text{م م}} \text{ اس لیے}$$

ضمن کرد کہ دیے ہوئے نظام کا کوئی اور وترن قی ہے اور اس کا
مطلی نقطہ ص ہے۔

نیز فرض کرو کہ یہ وتر مسک سے تھے پر اور مرتب سے سنا پر
لتا ہے۔

$$\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{م م}}{\text{ن م}}$$

نیز $\frac{مس ن}{ن س} = \frac{مس ن}{ن س}$ کیونکہ ان دونوں محمولوں پر کے نقطے میں اور

اس لیے $\frac{\text{مے ص}}{\text{را ص}} = \frac{\text{نئے ص}}{\text{را ص}}$

لیکن سرسرا اور مے مے کا عقد تقاطع ک ہے
اس لیے نقطہ مے مے ک مے پر واقع ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیے ہوئے نظام کے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق
خط مستقیم ہے جو کہ میں سے گزرتا ہے۔

نوٹ (۱۱) مرکز دار محمد علی کی مصورت میں چونکہ مرکز میں سے گزرنے والے فی تخیف مرکز پر ہوتی ہے اس لیے متنازی دروں کے وسطی نقطوں کا طریق

محوری کے مرکز میں سے گزرنے والا خط ہے۔

نوٹ (۲) چونکہ مکانی کا دوسرا راس α لاتنا ہی پر ہوتا ہے اس لیے α کا وسطی نقطہ ج (یعنی مکانی کا مرکز) بھی لاتنا ہی پر ہے اس لیے مکانی کی صورت متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق مکانی کے محور سے لاتنا ہی پر ہوتا ہے۔
یعنی مکانی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

— — — — —

— — — — —



اغلاطنا

ہندی مخروطات

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
۵ تا ۱۰	۱۱ تا ۵	۳	۸۸	مخروطات	مخروطات	۳۳	پیشانی
۴	۴	۵	۵	مخروطوں	مخروطوں	۳۵	۵
۴	۴	۸۸	۸۸	میں سے ہر دو کے	میں سے کے	۲	۵
خ		۹۱	۹۱	ن ن	ن ن	۲۱	۵
ج ب	ج ب	۱۳	۹۲	ع	ع	۳۰	شکل میں
ج ۱	ج ۱	۱۲	۹۳	منطبق	منطبق	۳۲	شکل ۲
م		۱۲	۹۴	ہیں	ہیں	۳۹	۱
ان غلطیوں سے بچنا	ان غلطیوں سے بچنا	۱۱	۱۰۳	د اور مکانی	د مکانی	۵۹	۲۱
راؤ (۱+۲)	راؤ (۱+۲)			طاؤ	طاؤ	۶۱	۱۰
				گزرنے	گزرنے	۶۲	۱۳
مخروطات	مخروطات	۱۰۴	۱۰۴	مکانی	مکانی	۶۳	۱
مخاطب	مخاطب	۱۰۵	۱۰۵	ن		۶۴	۴
						۶۵	۲

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
ب	مقادیر	۱۲۶	۱۳۱	ماس	۱۸	۱۱۰	۱۱۶
ج ب	ج ب	۲۱	۱۳۲	دیا	۱	۱۱۸	۱۲۰
س خ	س ح	۳	۱۳۰	ج	ج	۱۲۰	۱۲۳
دیے	مانک	۱۳	۱۳۳	ج	ج	۱۲۳	۱۲۳
ماسک	محررتا	۱۸	۱۶۱	ص	۱۲۳	۱۲۳	۱۲۳
گزرنا	شکل میں	۲۳	۱۶۴	ھ	۱۲۳	۱۲۳	۱۲۳
ق	نقطہ تقاطع	۱۳	۱۸۱	مزدوج	۲۳	۱۲۳	۱۲۳

